

# **COMPORTAMENTO A FATICA DI COMPONENTI MECCANICI SOGGETTI A SOLLECITAZIONI RANDOM: ANALISI CRITICA DEI METODI IN FREQUENZA.**

G. Lori, D. Pioli

*Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università degli Studi di Perugia, Via G. Duranti 67  
- 06125 Perugia, e-mail: lori@caedii.unipg.it , pioli@caedii.unipg.it*

## **SOMMARIO**

Nell'ambito della progettazione meccanica, grazie alle enormi potenzialità degli odierni strumenti di calcolo per la modellazione FEM e multibody, è ormai realisticamente utilizzabile una procedura di analisi a fatica di componenti meccanici sollecitati in maniera random i cui diversi passi vengono risolti tutti completamente nel dominio della frequenza. La fase più debole di questa metodologia rimane la valutazione diretta dalla PSD di tensione della funzione distribuzione delle ampiezze dei cicli di fatica: in sostanza non si è ad oggi in grado di trasportare l'algoritmo di rainflow cycle counting, definito nel dominio del tempo, nella sua forma duale frequency-domain. Gli autori propongono in questo articolo un'indagine critica sui lavori presenti in letteratura che hanno affrontato tale problematica nel corso degli ultimi venti anni. In particolare è stata monitorata una categoria di processi random molto importanti nella dinamica, i processi bimodali, caratterizzati dall'effettiva partecipazione delle sole due prime risonanze della struttura al processo di tensione. Obiettivo dell'articolo è quello di individuare i parametri indipendenti di tali processi per esprimere tramite essi la funzione distribuzione delle ampiezze dei cicli di fatica associata. A tale scopo sono stati presi come riferimento la formula narrow-band e quella di Dirlik, la prima perché la più importante conclusione teorica raggiunta, la seconda in quanto fornisce i migliori risultati previsionali sulla base del confronto col dominio del tempo, per diverse classi di processi random.

## **ABSTRACT**

In mechanical design, by actual FEM and Multibody calculate instruments means, is realistic now to use frequency methods for fatigue analysis on mechanical component subjects to random forces. The weakly step of this procedure is to evaluate cycles amplitude pdf directly from stress PSD. In fact the translation to frequency domain of the Rainflow cycle counting is a very large problem. The authors suggest a critical research on specific literature of last twenty years. It has been especially considered a very important class of random process: bimodal PSD. The target of this work is to identify independent parameters of these processes and to evaluate through them the pdf amplitude of cycles. It has been referred to Bendat's theory and Dirlik's formula: the first is the most important theoretical result, the second has the best results in comparison to the time domain estimation.

## 1. INTRODUZIONE

La stima della vita a fatica di componenti meccanici sollecitati da fenomeni random è una fase fondamentale fin dai primi passi dell'attività di progettazione. Con le attuali potenzialità di calcolo, grazie alla modellazione FEM e a quella multibody, si stanno via via perfezionando le modalità di analisi dinamica e possono essere sfruttate a pieno le proprietà di definizione duale proprie di un processo random ([1,2]), garantendo così la possibilità di lavorare sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza. Quest'ultima strada risulta preferibile per diverse motivazioni, ma quella che la rende particolarmente interessante ai fini della progettazione risiede nella capacità di sintesi delle informazioni, e quindi nella opportunità di rendere possibili stime di sufficiente attendibilità con modesti tempi di calcolo, che è del resto il compromesso ideale ricercato nelle fasi iniziali di design, atte all'individuazione delle zone critiche di dimensionamento, all'ottimizzazione strutturale e alla scelta della migliore soluzione costruttiva fra quelle proposte. Purtroppo vi sono però alcune notevoli problematiche che hanno limitato finora l'affidabilità della procedura, legate essenzialmente alla trasposizione in frequenza di strumenti nati e pensati nel dominio del tempo. Rimandando ad altre trattazioni il problema legato alla sensitività dei parametri che ruotano attorno all'equivalenza fra la definizione di un processo random tramite sue time history campione o tramite la sua Power Spectral Density, e quindi frequenza di campionamento, frequenza di taglio ed errori della stima ([3-6]), ci occuperemo di quello che forse è la fase critica di tutta la procedura in frequenza, e cioè l'individuazione delle leggi che legano una PSD di tensione allo spettro di distribuzione delle ampiezze dei cicli di fatica associato (probability density function, pdf). Non tratteremo quindi le modalità di ottenimento dei processi di tensione (o deformazione) nei vari punti della struttura, aspetto questo legato all'analisi armonica del sistema ([1,2]), ma assumeremo le PSD ottenute come affidabili e non viziate dagli errori di stima insiti nel processo. A questo punto, come anticipato, l'obiettivo diventa "tradurre" l'algoritmo di rainflow cycle counting ([7]) nel dominio della frequenza, rendendolo idoneo a fornire la distribuzione dei cicli fra le varie ampiezze di tensione, ricevendo come input non più una sequenza di picchi e valli del segnale, ma la sua PSD. Le ipotesi fondamentali necessarie per l'applicazione della metodologia presentata in quest'articolo, sono la linearità del sistema ed una sollecitazione schematizzabile come un processo random stazionario e gaussiano. Conformemente a quanto proposto in letteratura sull'argomento ([8-14]), nel seguito si omette la stima della distribuzione congiunta di valor medio ed ampiezza dei cicli di fatica, ritenendo sufficiente la determinazione solo della singola distribuzione delle ampiezze per il grado d'approssimazione che caratterizza le finalità del metodo proposto.

## 2. RASSEGNA DEI METODI IN FREQUENZA

Il primo risultato conseguito nel dominio della frequenza è dovuto a Bendat ([3]), il quale individuò il legame fra la PSD e la distribuzione dei picchi del segnale relativo nel caso di processi narrow-band o banda stretta. Si può scrivere:

$$P(S) = \frac{S}{4\lambda_0} \exp\left(-\frac{S^2}{8\lambda_0}\right) \quad (1)$$

dove  $P(S)$  rappresenta una distribuzione di Rayleigh,  $S$  è il range (doppio dell'ampiezza) dei cicli di fatica, mentre  $\lambda_0$  è l'area sottesa dalla PSD o momento spettrale d'ordine zero della PSD, essendo il momento spettrale d'ordine  $n$  definito dalla relazione ([4]):

$$\lambda_n = \int_0^{\infty} G(f) \cdot f^n \cdot df \quad (2)$$

Nella precedente  $G(f)$  rappresenta la PSD “one-sided” ([5]). Nota la  $P(S)$ , il danneggiamento cumulativo nell’unità di tempo si può calcolare con la seguente relazione:

$$E[D] = \frac{E[P]}{k} \cdot \int_0^{\infty} S^b \cdot p(S) \cdot dS \quad (3)$$

Con  $E[P]$ , valore atteso dei picchi del segnale nell’unità di tempo, che si valuta dalla relazione:

$$E[P] = \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \quad (4)$$

Mentre  $k$  e  $b$  sono i coefficienti della curva di Wohler nella forma  $N=kS^{-b}$ .

Un parametro largamente utilizzato per procedere ad una classificazione dei processi random è il fattore d’irregolarità  $\gamma$ , definito come segue:

$$\gamma = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda_4}} \cong \frac{E[0]}{E[P]} \quad (5)$$

Il fattore d’irregolarità rappresenta quindi il rapporto fra i valori attesi degli attraversamenti positivi dello zero ( $E[0]$ ) e quello del numero dei picchi, entrambi valutati nell’unità di tempo. Per il processo banda stretta tale rapporto è pressoché uguale a uno. In tale situazione l’algoritmo di rainflow associa picchi e valli successivi e la  $P(S)$  è nota poiché coincide esattamente (affermazione tanto più vera quanto più  $\gamma$  è prossimo all’unità) con la distribuzione dei picchi, pari appunto alla (1). Nelle applicazioni pratiche tali tipologie di segnali sono poco frequenti, in quanto affinché la (3) possa essere utilizzata, la PSD deve essere concentrata attorno ad una sola frequenza, e ciò accade se solo uno dei modi di vibrare della struttura partecipa in quel punto fisico alla formazione del segnale di tensione, o comunque se le altre risonanze producono solo piccole oscillazioni che vanno a determinare cicli d’isteresi secondari praticamente trascurabili ai fini del danneggiamento a fatica. Tale valutazione deve però essere effettuata in rapporto alle proprietà del materiale utilizzato e quindi non può essere generalizzata a priori. Molto più frequenti sono invece situazioni in cui solo i primi due modi della struttura vengono evidenziati nella distribuzione della potenza del processo sulle frequenze (PSD bimodali). Per questi tipi di spettri il fattore d’irregolarità può scendere a valori prossimi allo zero e con esso cresce il grado d’indeterminazione nella comprensione del meccanismo di accoppiamento di picchi e valli seguito dall’algoritmo di rainflow. Nel corso degli ultimi venti anni sono state proposte diverse metodologie preposte all’estensione della soluzione di Bendat ai cosiddetti fenomeni banda larga, ed in particolare a quelli bimodali.

I metodi ai coefficienti correttivi ([8-10]) vanno a correggere direttamente il risultato della (3) con coefficienti sperimentali dipendenti anche dal materiale (per mezzo di  $b$  e  $k$ ), oltre che dalle proprietà spettrali. Altri metodi approssimano la pdf del range dei cicli per mezzo di combinazioni lineari di distribuzioni di probabilità classiche ([6,11-13]): i parametri della combinazione lineare e quelli delle distribuzioni dipendono unicamente dai momenti spettrali della PSD e sono quindi svincolati dal materiale. Gli ultimi metodi suggeriti, infine, si

propongono di tradurre il meccanismo di rainflow nel dominio della frequenza ([14]). Questo è forse il procedimento più interessante dal punto di vista teorico, ma risulta di difficile inserimento in un algoritmo d'ottimizzazione strutturale per l'elevato costo computazionale. Dato l'elevato interesse insito nella piena comprensione dei processi bimodali, su tali classi di PSD gli autori hanno effettuato un'indagine comparativa delle stime, prendendo in considerazione il metodo di Bendat, la formula di Dirlik ([11]), il metodo Zhao-Baker ([12]), e i due specifici procedimenti di Sakai-Okamura ([13]) e Fu-Cebon ([6]) allo scopo di testare le metodologie più affidabili nel confronto col metodo di riferimento nel dominio del tempo. Il campo d'indagine è stato delineato per mezzo di due variabili già ampiamente utilizzate nella letteratura, e cioè il rapporto delle aree  $R$  e rapporto delle frequenze  $b$  delle due componenti monomodali della PSD globale (vedi figura 2). Il confronto è stato quindi effettuato valutando la distribuzione di riferimento del range dei cicli ottenuta mediando le singole distribuzioni relative a 10 time histories, ricostruite dalla PSD individuata dai valori di  $R$  e  $b$  e modellata con forma triangolare. La scelta di tale approssimazione è nata dalla possibilità di generare PSD con valori di  $R$  desiderati e dal tentativo di "pulire" i risultati dalla dipendenza della larghezza di banda dei singoli picchi: infatti come può vedersi dalla figura 1a il fattore d'irregolarità di una PSD triangolare rimane superiore a 0.95, a parità di area sottesa, per un largo campo di valori del rapporto  $\Delta f/f$ , dove  $\Delta f$  è la base del triangolo di area fissata, mentre  $f$  è la frequenza centrale. Con tali considerazioni si è ipotizzato di individuare nelle aree  $A1$  e  $A2$  e nel rapporto  $b$  delle frequenze i tre gradi di libertà necessari alla definizione della pdf del range dei cicli. La figura 1b, a tale proposito, mostra come in prima approssimazione il legame funzionale dipenda essenzialmente dal rapporto  $b$  e non dalle singole  $f_2$  e  $f_1$ .

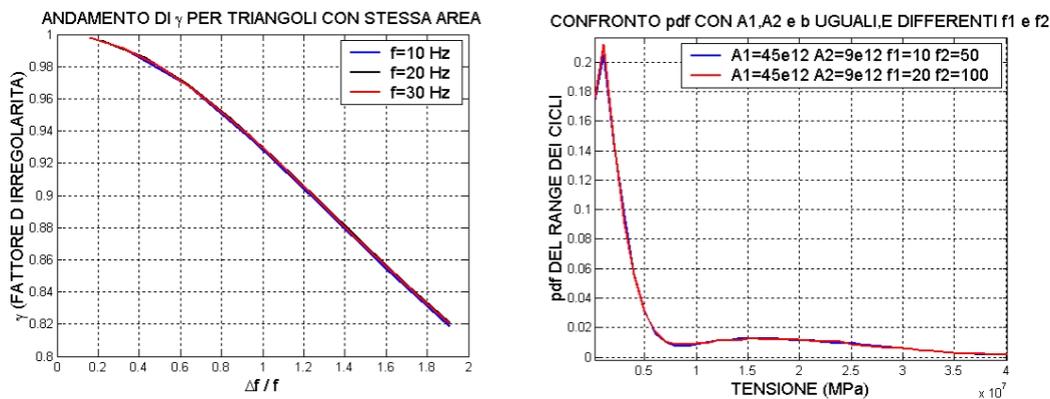


Fig1 - Andamento di  $\gamma$  per PSD triangolari (1a) e dipendenza della pdf dal rapporto  $f_2/f_1$  (1b)

Nei prossimi paragrafi verrà mostrato come la schematizzazione triangolare fornisca risultati accettabili se confrontati con PSD reali di pari area sottesa e pari frequenza centrale. Per svincolare dalle proprietà del materiale il confronto delle stime effettuate, si è deciso di definire un indice d'errore rispetto alla "vera" pdf del range, con cui giudicare l'efficacia del metodo:

$$IEP = \sum_{i=1}^m \left( \frac{|P(S_m) - R(S_m)|}{R(S_m)} \cdot \frac{S_m}{T} \right) \quad (6)$$

In essa  $IEP$  è l'indice d'errore pesato,  $P$  è la pdf in esame,  $R$  è la pdf risultante dal metodo nel dominio del tempo,  $S_m$  è il valore intermedio dell' $m$ -esimo intervallo di discretizzazione del

campo di valori del range, mentre  $T$ , pari a  $\Sigma S_m$  è il fattore con cui viene pesata la differenza normalizzata fra il numero di cicli previsto dai due modelli a quel valore del range.

La scelta di tale definizione è stata dettata dall'obiettivo di mantenere le caratteristiche del fenomeno della fatica, in cui il peso dei cicli ad ampiezza maggiore è preponderante, senza però incorrere nel rischio di accettare previsioni che risultano buone dal punto di vista del danneggiamento grazie ad errori che si compensano nelle diverse zone della pdf.

### 3. MODELLAZIONE DELLE PSD BIMODALI

Il campo di indagine è stato ridotto alle sole PSD bimodali che sono state modellate con delle semplici forme triangolari in grado di dare un ottimo controllo sui parametri fondamentali scelti per caratterizzare il grado di "bimodalità" del fenomeno random stazionario collegato alla relativa PSD.

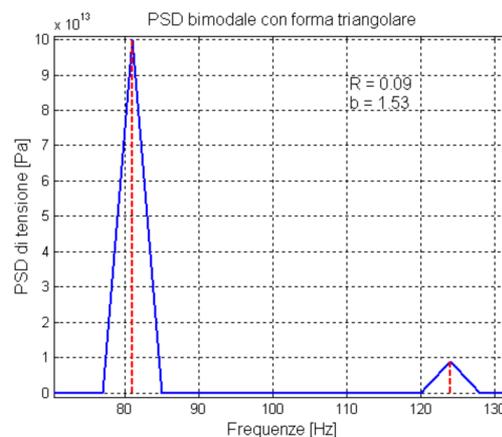


Fig. 2 – Esempio di PSD bimodale con forma triangolare

Come parametri di controllo sono stati scelti il rapporto  $b$  tra le frequenze centrali e il rapporto  $R$  tra le due aree sottese:

$$b = \frac{f_2}{f_1}, \quad R = \frac{A_2}{A_1} \quad (7)$$

Tali parametri sono stati fatti variare in un ampio campo di valori ( $b = 1.5 \div 15$ ;  $R = 0.05 \div 1.5$ ) in modo da rappresentare una vasta classe di PSD bimodali con diversi valori del fattore di irregolarità  $\gamma$ . In questo modo è stato possibile valutare la dipendenza di  $\gamma$  da  $R$  e da  $b$  (fig.3) ed esprimerla analiticamente attraverso la (8).

$$\gamma = \frac{1 + R \cdot b^2}{\sqrt{(1 + R) \cdot (1 + R \cdot b^4)}} \quad (8)$$

La forma analitica proposta dagli autori per  $\gamma$ , descrive in maniera molto soddisfacente l'andamento sperimentale trovato utilizzando la sua formulazione classica ([4,5]), funzione dei momenti spettrali. Successivamente sono state eseguite delle simulazioni mirate a verificare la validità della formula di Bendat, al variare del fattore di irregolarità, ossia al variare dei due parametri  $b$  ed  $R$  delle PSD. Gli spettri di carico valutati con la formula di Bendat sono stati confrontati con quelli ottenuti applicando i consueti metodi di conteggio a

10 time histories ricostruite dalle PSD di partenza. Dal confronto dei due spettri di carico è stato possibile definire un parametro di errore in grado di quantificare di quanto lo spettro di carico valutato con la formula di Bendat si discosta da quello reale. Questo parametro, contributo originale degli autori, definito indice di errore pesato (*IEP*), ha il duplice scopo di individuare con una certa affidabilità il campo di applicabilità del metodo ed eventualmente correggere il valore del danneggiamento ottenuto.

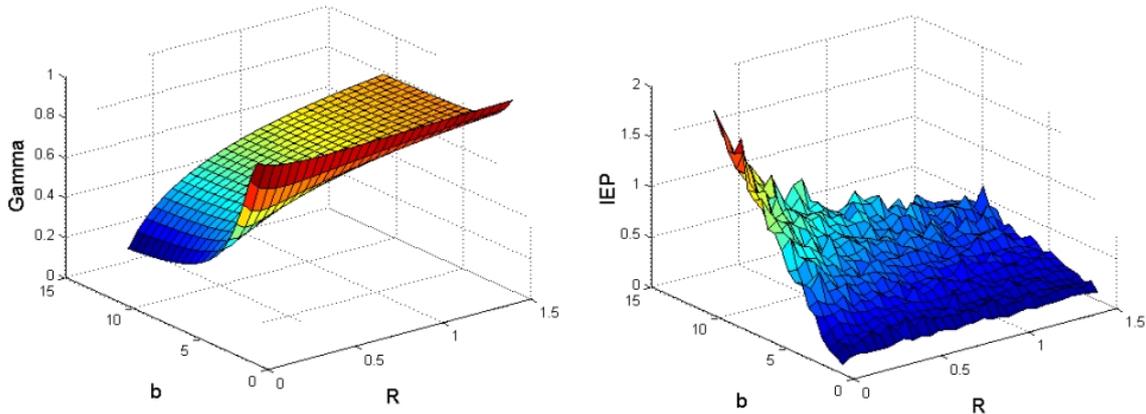


Fig. 3 – Andamento di  $\gamma$  (3a) e *IEP* (3b) al variare di *R* e *b*

Da un semplice confronto visivo fra le due superfici si può notare, come era lecito attendersi, un comportamento speculare fra le due grandezze che si può meglio apprezzare dall'analisi dell'andamento delle due funzioni  $\gamma$  e *IEP* a *b* ed a *R* costanti, come mostrato nelle figure successive 4a e 4b. Dalla prima delle successive figure si può notare come la funzione  $IEP = IEP(R, \bar{b})$ , risulta avere un andamento simmetrico rispetto all'analoga funzione  $\gamma = \gamma(R, \bar{b})$ , con *b* fissato. Al variare di *b*, fissato *R*, si evidenzia invece un andamento rettilineo di *IEP*, che defisce una dipendenza praticamente lineare di *IEP* con *b*:

$$IEP(R, b) = m(R) \cdot b + n(R) \quad (9)$$

in cui il coefficiente angolare (*m*) ed il termine noto (*n*) sono funzioni del solo parametro *R*. Gli andamenti sperimentali di *m* ed *n* sono mostrati in blu nelle figure successive, in cui vengono riportate in rosso anche le relative funzioni analitiche trovate adattando semplici leggi iperboliche. Sostituendo i valori di *m*(*R*) ed *n*(*R*) nella (9), si riesce a ricostruire in maniera abbastanza fedele l'andamento dell'indice di errore pesato come si può vedere confrontando la seguente figura 6 con la precedente figura 3b.

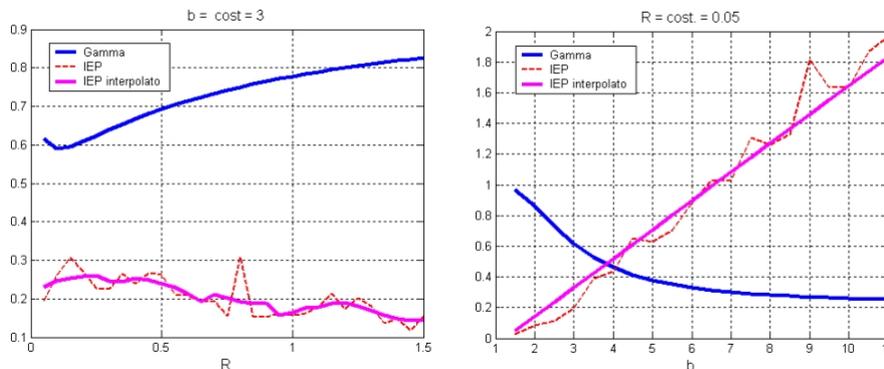


Fig.4 – Andamenti di  $\gamma$  e *IEP* a *b* costante (4a) ed ad *R* costante (4b)

Come per la formula di Bendat l'indice  $IEP$ , può essere definito anche per tutte le altre relazioni di valutazione diretta dello spettro di carico a partire dalla PSD, proposte in letteratura e definire il campo di applicabilità dei suddetti metodi. Relativamente al caso di PSD bimodali, modellate con semplici forme triangolari, si è riusciti a trovare una relazione fra il parametro  $IEP$  della formula di Bendat, e semplici parametri geometrici della PSD ( $R$  e  $b$ ) senza ricorrere a complicate relazione fra i parametri dello spettro di carico ed i momenti spettrali. I risultati raggiunti limitatamente alle PSD bimodali triangolari, sono estendibili anche a più generiche PSD bimodali, come evidenziato nel successivo paragrafo.

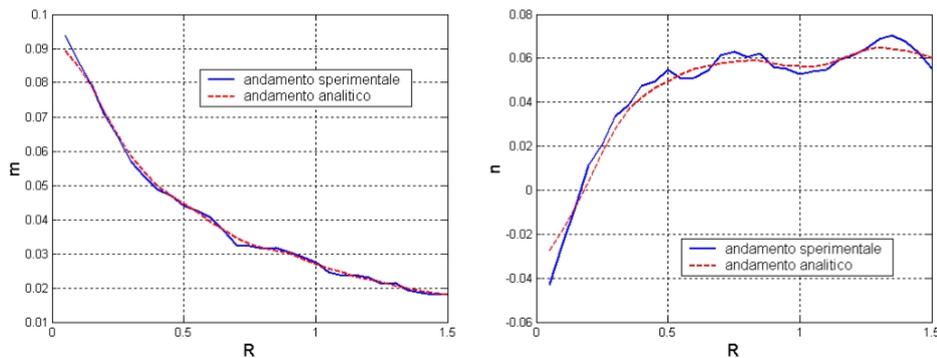


Fig. 5 – Andamenti sperimentali ed analitici di  $m$  ed  $n$

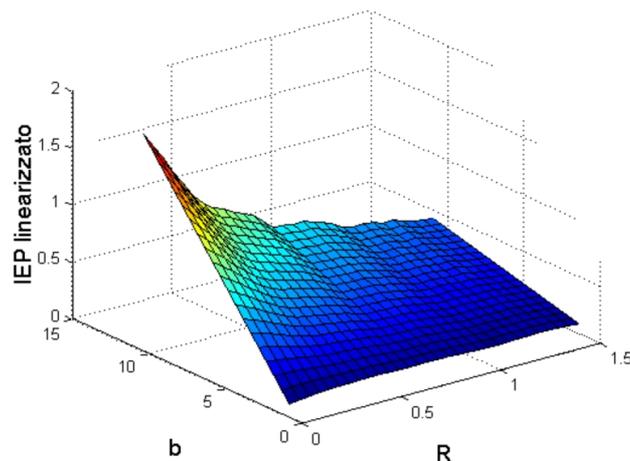


Fig. 6 –  $IEP$  linearizzato

#### 4. SIMULAZIONI SUL MODELLO TRAVE

Come verifica dei risultati raggiunti limitatamente al caso di PSD modellate con semplici geometrie triangolari, si è provveduto ad effettuare la medesima indagine su PSD ottenute da analisi dinamiche eseguite su un modello FEM di una trave incastrata agli estremi (con lunghezza pari ad  $1m$ , sezione trasversale rettangolare  $0.01 \times 0.1m^2$ , modulo di elasticità  $E=2.1e11Pa$ , densità  $\rho=7810Kg/m^3$ ) eccitata con un singolo ingresso ai vincoli tramite una PSD di accelerazione nella direzione verticale. In questo caso forma ed intensità delle PSD e di conseguenza anche i parametri scelti per caratterizzarle ( $b$  ed  $R$ ), sono dipendenti esclusivamente dalle caratteristiche dinamiche del modello, geometria, massa, elasticità e smorzamento. Geometria, massa (densità) e rigidità sono stati scelti in maniera tale che nel range di frequenza ( $0 \div 400 Hz$ ) di interesse fossero rilevanti solo le prime due frequenze naturali, mentre il coefficiente di smorzamento è stato fatto variare in un campo di valori

fissato. Se allo stesso tempo si rileva la risposta in termini di tensione principale in punti differenti della trave (nell'intorno del nodo situato ad  $1/4$  della luce), si ottiene una famiglia di PSD bimodali con  $b$  costante e pari  $5.434$  (con  $f_1=53$  Hz e  $f_2 = 288$  Hz) ed  $R$  variabile tra  $0.18$  e  $1.5$ , ricostruendo così per un modello fisico realistico, anche se solo parzialmente, la situazione proposta precedentemente per PSD triangolari. Per prima cosa si è verificata la validità della relazione proposta per il fattore di irregolarità.

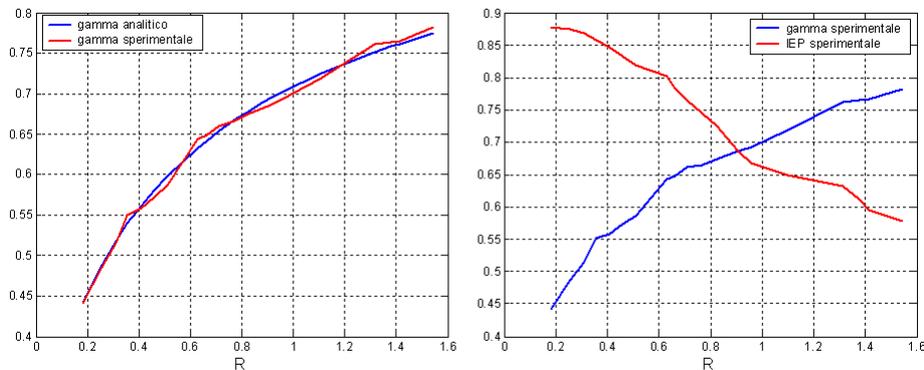


Fig. 7 – Confronto fra il gamma sperimentale ed il gamma analitico (7a) e tra l'andamento di IEP sperimentale ed il gamma sperimentale (7b) con  $b=5.434$

La precedente figura 7a, in cui in blu viene riportato il valore di  $\gamma$  analitico ed in rosso quello dedotto sperimentalmente, mostra un'ottima attendibilità della formulazione proposta, dimostrando anche la validità dell'ipotesi di partenza secondo cui il fattore di irregolarità risulta essere dipendente (almeno nel caso di PSD bimodali) da soli due parametri ( $b$  ed  $R$ ). Nella figura 7b invece viene riportato l'andamento di IEP e di  $\gamma$  al variare di  $R$ . Risulta lo stesso tipo di andamento "simmetrico" di IEP rispetto a  $\gamma$ , come discusso nel precedente paragrafo e mostrato nella figura 3a, anche se si hanno dei valori mediamente più alti dell'indice di errore. Dalle precedenti considerazioni si può concludere, come sarà chiarito con maggior dettaglio nel successivo paragrafo, che non è possibile esprimere l'indice IEP, e conseguentemente il danneggiamento prodotto, in funzione di due soli parametri, contrariamente al fattore di irregolarità.

## 5. CONCLUSIONI DELLE SIMULAZIONI E MIGLIORAMENTI PROPOSTI.

Le simulazioni hanno inequivocabilmente mostrato come fra le metodologie selezionate, tutte appartenenti alla seconda delle tipologie discusse nel paragrafo 2, il metodo di Dirlik presenta risultati globalmente migliori in tutto il campo di valori di  $R$  e  $b$  indagati. Per illustrare in maniera qualitativa tale conclusione la figura 8 riporta il confronto fra gli indici IEP riscontrati nel caso della formula di Dirlik ed in quello della formula di Bendat, che presenta indici d'errore anche di un ordine di grandezza maggiori di quelli relativi a Dirlik.

Risultati analoghi si ottengono riproducendo la stessa simulazione per valori diversi di  $A_1$  e  $f_1$ . L'affidabilità della formula di Dirlik è quindi tale da ritenere possibile il suo inserimento all'interno di un algoritmo d'ottimizzazione. Un miglioramento delle previsioni è però necessario nel caso di piccoli valori del rapporto delle aree  $R$ : infatti in tali situazioni l'errore eccede i limiti di sicurezza ed inoltre la formula di Dirlik non possiede lo stesso carattere di conservatività dell'approssimazione narrow-band, per cui la stima può essere notevolmente in difetto.

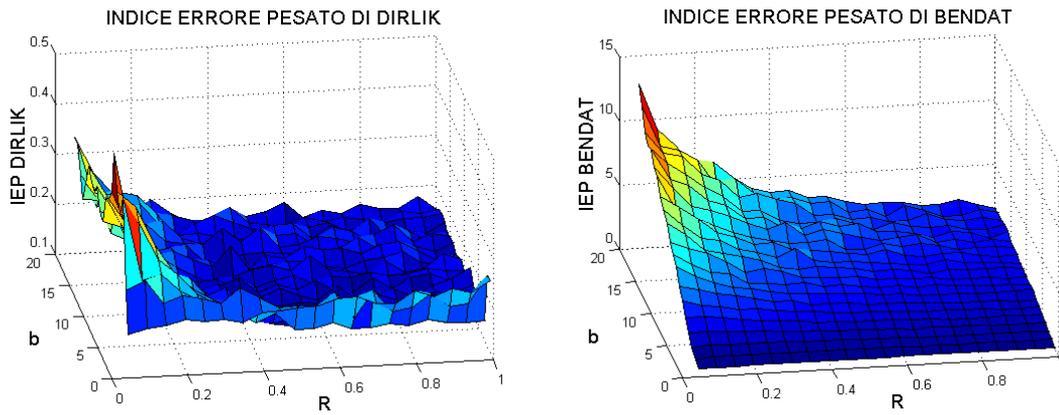


Fig. 8 – Confronto fra l'indice IEP di Dirlik e quello di Bendat.

È comunque da ricordare che spesso il problema può essere aggirato per quanto detto nel paragrafo 2 sulla trascurabilità dei piccoli cicli di isteresi, riconducendosi al caso banda stretta. Tuttavia gli autori ritengono auspicabili miglioramenti in questo senso, e a tale scopo propongono l'utilizzo di un semplice modello, derivato da quello di Dirlik, ma in cui la dipendenza dalla PSD venga espressa non dai momenti spettrali, ma dai valori di  $A_I$ ,  $R$  e  $b$ , che si ipotizzano essere sufficienti per l'individuazione della  $P(S)$ , almeno in prima approssimazione, come discusso precedentemente. Il modello proposto è formato dalla combinazione lineare di una distribuzione di Rayleigh e di una esponenziale:

$$P(S) = A \cdot c \cdot \exp(-c \cdot S) + (1 - A) \cdot \frac{S}{4 \cdot k \cdot \lambda_0} \cdot \exp\left(-\frac{S^2}{8 \cdot k \cdot \lambda_0}\right) \quad (10)$$

I coefficienti  $A$ ,  $c$ ,  $k$  devono quindi essere espressi in funzione di  $A_I$ ,  $R$  e  $b$  e vanno determinati sulla base del confronto con l'effettiva distribuzione del range dei cicli ottenuta dal rainflow. Le potenzialità dell'approccio proposto risultano chiare se si osserva la figura 9, che condensa alcuni dei risultati ottenuti valutando con un algoritmo di minimizzazione dell'indice IEP le terne  $(A, c, k)$  che determinano la pdf di migliore approssimazione della distribuzione reale. L'immagine di sinistra mostra come l'andamento di  $A$  sia abbastanza regolare e tale da rendere auspicabile un'interpolazione con legge analitica. Particolarmente interessante è soprattutto la dipendenza dal rapporto  $b$ , con cui  $A$  cresce in maniera monotona ad evidenziare il peso crescente dell'esponenziale, che regola i cicli a piccola ampiezza, al crescere del rapporto delle frequenze. Inoltre è da notare come  $A$  risulti pressoché indipendente da  $R$ , suggerendo una riduzione di un grado di libertà del problema. Infine la seconda immagine mostra come il danneggiamento nell'unità di tempo calcolato con le terne ottime  $(A, c, k)$  migliori sensibilmente in alcuni casi le stime della formula di Dirlik. Inoltre lo stesso andamento, che ricordiamo essere stato trovato minimizzando l'errore IEP, dimostra l'efficacia di tale indice d'errore e il suo stretto legame col danneggiamento valutato secondo Miner.

La ricerca della soluzione analitica in forma chiusa di migliore approssimazione, attualmente oggetto di studio da parte degli autori, sembra quindi essere favorita da tali considerazioni qualitative.

Nel caso di positivi sviluppi, l'espressione della  $P(S)$  ottenuta potrebbe essere utile per una migliore stima della vita a fatica, nella direzione di una completa affidabilità dei metodi in frequenza, ma soprattutto sarebbe il punto di partenza per successive ricerche al fine di comprendere meglio alcuni meccanismi ancora oscuri dei metodi di conteggio e per legare i

parametri caratteristici di una PSD, e quindi quelli della pdf dei cicli, con le grandezze che determinano il comportamento dinamico di una struttura alle risonanze proprie.

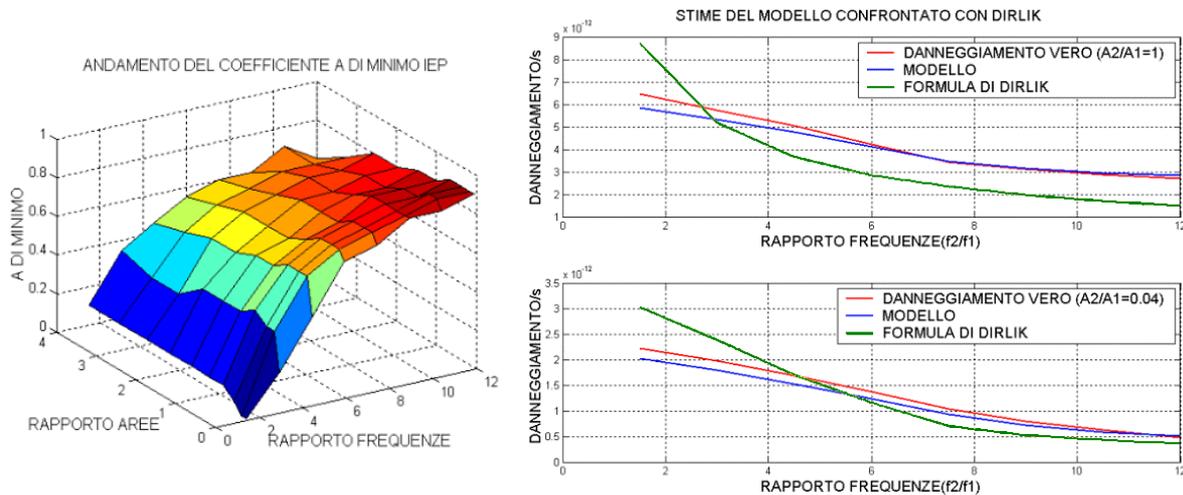


Fig. 9 – Prospettive di miglioramento della stima del modello proposto.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] N.W.M. Bishop, "The use of frequency domain parameters to predict structural fatigue", *Ph.D. thesis, University of Warwick (UK)*, 1988;
- [2] X. Pitoiset, A. Preumont, "Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures", *International Journal of Fatigue* Vol. 22, 2000, pp 541-550;
- [3] J.S., Bendat, "Probability functions for random responses", *Nasa Report*, NAS-5-4590;
- [4] E.H. Vanmarke, "Properties of spectral moments with applications to random vibration", *J. Engineering Mechanical division ASCE*, Vol 98-2, pp.425-446;
- [5] J.S., Bendat, A.G. Piersol, Analysis and measurement procedures, Wiley Interscience;
- [6] T.T. Fu, D. Cebon, "Predicting fatigue lives for bi-modal stress spectral densities", *International Journal of Fatigue*, Vol. 22, 2000, pp. 11-21;
- [7] I.Rychlik, "A new definition of the rainflow cycle counting method", *International Journal of Fatigue*, Vol. 9, 1987, pp. 119-121;
- [8] P.H. Wirsching, A.M.Asce, M.C.Light, "Fatigue under wide band random stresses", *Journal of the structural division*, Vol.106, 1980, pp, 1593-1607;
- [9] G.Petrucci, B. Zuccarello, "Un metodo per la valutazione della vita a fatica sotto sollecitazioni random a banda larga", *Atti del XXX Convegno Nazionale AIAS*, 2001, Alghero;
- [10] D.Benasciutti, R.Tovo, "Modelli di previsione del danneggiamento a fatica per veicoli in regime stazionario ed ergodico", *Atti del XXXI Convegno Nazionale AIAS*, 2002, Parma;
- [11] T. Dirlik, "Application of computers in Fatigue Analysis", *Ph.D. thesis, University of Warwick (UK)*, 1985;
- [12] W. Zhao, M.J. Baker, "On the probability density function of rainflow stress range for stationary gaussian processes", *Int. Journal of Fatigue*, Vol.14, 2, 1992, pp. 121-135;
- [13] S. Sakai, H. Okamura, "On the distribution of rainflow range for gaussian random processes with bimodal PSD", *JSME Int. Journal Series A*, Vol. 38, 4, 1995, pp. 440-445;
- [14] M. Olagnon, "Practical computation of statistical properties of rainflow counts", *International Journal of Fatigue*, Vol. 2, 1989, pp. 306-314.