

COMPORTAMENTO A FATICA DI COMPONENTI MECCANICI SOGGETTI A SOLLECITAZIONI RANDOM: SVILUPPO DI UN METODO DI VALUTAZIONE DI PSD DI TENSIONE IN AMBIENTE DI SIMULAZIONE MULTICORPO

C. Braccesi, F. Cianetti

*Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università degli Studi di Perugia, Via G. Duranti 67
- 06125 Perugia, e-mail: cianfi@unipg.it*

SOMMARIO

La valutazione del danneggiamento a fatica direttamente dalla Power Spectral Density (PSD) di tensione o deformazione, si sta dimostrando di estrema accuratezza per tutta una famiglia di processi random caratterizzati dalla proprietà di essere stazionari.

Contributo originale del presente lavoro è quello di aver definito ed implementato una metodologia di analisi che permette di estrarre matrici PSD di tensione e deformazione da componenti modellati con approccio modale (a partire da una modellazione agli elementi finiti) all'interno di modelli multicorpo di sistemi meccanici a fronte di una generica eccitazione di tipo random (ad esempio di tipo multi input con ingressi parzialmente correlati). Ulteriore risultato è quello di aver ideato ed implementato un metodo di valutazione dello stato più probabile di sollecitazione del componente a fronte di una generica eccitazione di tipo random consentendo l'individuazione rapida delle zone maggiormente sollecitate.

Le metodologie descritte sono state verificate utilizzando come test case un semplice modello multicorpo di riferimento e scegliendo come criterio di valutazione del danneggiamento a fatica l'approccio di *Dirlik* a partire da uno stato tensionale espresso in termini di PSD della "equivalent von Mises stress (EVMS)" o tensione di *von Mises* equivalente (*Preumont*).

ABSTRACT

The evaluation of the fatigue damage performed by the Power Spectral Density (PSD) function of stress and strain state, is proving to be extremely accurate for a family of random processes characterized by the property of being stationary.

The originality of the contribution of the present work is the definition and the implementation of an analysis methodology that allows the extraction of stress and strain PSD matrices from components modelled with modal approach (starting from a finite element modelling) inside multibody models of mechanical systems undergoing to a generic random load (i.e. a multi-input with partially correlated inputs). A further result is the ideation and the

implementation of a method of evaluation of the most probable state of stress of the component, allowing the quick individuation of the locations that are mostly stressed. The described methodologies were verified by using as a test case a simple reference multibody model and choosing as a damage evaluation method the *Dirlík* approach starting from a stress state expressed in terms of PSD function of the *Preumont's* “*equivalent von Mises stress (EVMS)*”.

1. INTRODUZIONE

La valutazione del danneggiamento a fatica direttamente dalla Power Spectral Density (PSD) di tensione o deformazione, mediante l'approccio di *Bendat* per i processi narrow-band [1] o attraverso la formula di *Dirlík* [2], nonché la teoria di *Bishop* e *Sherratt* [3], si sta dimostrando di estrema accuratezza per tutta una famiglia di processi random caratterizzati dalla proprietà di essere stazionari.

Nel contempo, si va completando la definizione di uno scenario di valutazione virtuale attraverso il quale simulare con sempre maggiore fedeltà il comportamento di sistemi meccanici alquanto complessi nonché lo stato deformativo e tensionale dei loro componenti [4]. L'analisi agli elementi finiti (FEM), combinata con la simulazione dinamica multicorpo (MBS), ha dimostrato di essere in grado di fornire tutte le informazioni necessarie ad effettuare valutazioni del danneggiamento a fatica di componenti meccanici nel dominio del tempo [5,6] a partire da storie di tensioni e deformazioni ricostruite sia mediante l'approccio statico che mediante l'approccio cosiddetto modale [7].

L'attività di ricerca iniziata presso il Dipartimento di Ingegneria Industriale dell'Università di Perugia, di cui il presente lavoro è il primo risultato, ha come obiettivo lo sviluppo di uno scenario di prova virtuale per la valutazione del comportamento a fatica di componenti meccanici nel quale la modellazione multicorpo del sistema, combinata alla modellazione modale di componenti, consenta di analizzare sia nel dominio del tempo che della frequenza tutte le classi di eventi caratterizzanti il funzionamento del sistema stesso; ciò consentirebbe di valutare l'affidabilità dei componenti a fronte di spettri di operazioni tipiche definite dall'utente, ma anche di ricostruire il *test ring* virtuale di operazioni standard che meglio riproduce una assegnata missione caratterizzata anche per via sperimentale. L'obiettivo perseguito risponde anche all'esigenza che viene dall'industria che è quella di ridurre il più possibile le prove su prototipo, sviluppando metodi di prototipazione e simulazione virtuale di sufficiente predittività.

Per quanto riguarda l'utilizzo dell'analisi dinamica nella valutazione del comportamento a fatica con approccio di tipo PSD, l'analisi della letteratura scientifica mostra come lo strumento di calcolo preminentemente adottato nell'analisi dinamica per la valutazione del comportamento a fatica a partire dalla Power Spectral Density (PSD) di tensione o deformazione sia, insieme al calcolo di tipo analitico-numerico, l'approccio agli elementi finiti [2]. Tale approccio risulta valido nota che sia l'interazione sia statica che dinamica del componente con il sistema e, quindi, note che siano le condizioni di vincolo relativo nonché la matrice PSD degli ingressi al componente.

Contributo originale del presente lavoro è quello di aver definito e sviluppato per primo uno strumento numerico che permetta di estrarre le PSD di tensione e deformazione da componenti meccanici modellati con approccio modale all'interno di modelli multicorpo.

Tale possibilità permette di analizzare contestualmente sia il comportamento del sistema nonché quello del componente valutando il grado di interazione sia statica che dinamica fra componente e sistema meccanico, permettendo di definire gli ingressi non solo al componente ma anche al sistema in maniera del tutto generica e modellando fedelmente i dispositivi di vincolo assoluti e relativi.

Ulteriore risultato dell'attività svolta è quello di aver ideato un metodo di valutazione dello stato più probabile di sollecitazione del componente a fronte di una generica eccitazione di tipo random consentendo la rapida individuazione delle zone maggiormente sollecitate.

2. VALUTAZIONE DELLA MATRICE PSD DEL TENSORE DI TENSIONE

Conformemente a quello che è l'approccio dei principali codici multibody all'analisi del moto dei sistemi, l'introduzione di corpi con proprietà elastiche avviene integrando un sistema di equazioni del moto espresse nella forma di *Eulero-Lagrange* e l'approccio seguito per descrivere il corpo flessibile è quello modale. Le deformazioni vengono stimate mediante una funzione di spostamenti δ discreta ottenuta moltiplicando la funzione di forma Φ (rappresentata dalle forme modali) con le coordinate generalizzate q [8-9]. Si utilizza quindi la seguente relazione:

$$\delta(c, t) = \Phi(c) \cdot q(t) \quad (1)$$

nella quale c è il vettore posizione del punto materiale, Φ è la funzione di forma espressa in termini di spostamento e rotazione e q è il vettore delle coordinate generalizzate.

Lo strumento numerico sviluppato, nell'ipotesi di comportamento lineare, proprio di sistemi sollecitati con processi random, prevede la linearizzazione del generico sistema meccanico e la sua rappresentazione state-space in termini di variabili di stato x definite dalle matrici A , B , C , D nell'ipotesi di sistema a più ingressi u e più uscite y e tempo-invariante (2).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Peculiarità sostanziale del metodo è la scelta delle coordinate generalizzate q del generico corpo flessibile come variabili di output del sistema.

E' così possibile definire la matrice $H_q(\omega)$ ($m \times n$) delle funzioni di risposta in frequenza definita a partire da n generici ingressi e con uscite le m coordinate lagrangiane (3); la $H_q(\omega)$ rappresenta il contributo in frequenza delle singole coordinate lagrangiane alla deformazione del componente flessibile.

$$H_q(\omega) = C \cdot (j\omega \cdot I - A)^{-1} B \quad (3)$$

A partire dalla matrice $H_q(\omega)$ e dalla matrice modale $\Phi^{\sigma, \varepsilon}$ dell' i -esimo singolo elemento o nodo del modello FEM, espressa in termini di tensioni o deformazioni (di dimensioni $6 \times m$), è quindi possibile valutare la matrice di funzioni di risposta in frequenza $H_{\sigma, \varepsilon}(\omega)$ ($6 \times n$) fra gli ingressi e il tensore delle tensioni mediante la (4).

$$H_{\sigma, \varepsilon}(\omega) = \Phi^{\sigma, \varepsilon} \cdot H_q(\omega) \quad (4)$$

Definendo quindi la generica matrice Power Spectral Density degli n ingressi in generale parzialmente correlati $G_x(\omega)$ è possibile ottenere la matrice Power Spectral Density $S(\omega)$ del tensore di tensione (in generale di dimensioni 6×6) dell' i -esimo elemento o nodo del modello (riportata nella (6) insieme al vettore di tensione modale dell' i -esimo elemento e del j -esimo modo $\Phi_{i,j}^{\sigma}$) mediante la relazione seguente:

$$S = \Phi^{\sigma} \cdot [H_q \cdot G_x \cdot H_q^t] \cdot \Phi^{\sigma^t} \quad (5)$$

nella quale con l'apice $'$ si intende il coniugato complesso, con l'apice t si indica la matrice trasposta ed il termine tra parentesi rappresenta la matrice PSD $G_q(\omega)$ ($m \times m$) delle coordinate lagrangiane (matrice definita *Hermitiana*).

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{x,x}(\omega) & S_{x,y}(\omega) & S_{x,z}(\omega) & S_{x,xy}(\omega) & S_{x,xz}(\omega) & S_{x,yz}(\omega) \\ S_{y,x}(\omega) & S_{y,y}(\omega) & S_{y,z}(\omega) & S_{y,xy}(\omega) & S_{y,xz}(\omega) & S_{y,yz}(\omega) \\ S_{z,x}(\omega) & S_{z,y}(\omega) & S_{z,z}(\omega) & S_{z,xy}(\omega) & S_{z,xz}(\omega) & S_{z,yz}(\omega) \\ S_{xy,x}(\omega) & S_{xy,y}(\omega) & S_{xy,z}(\omega) & S_{xy,xy}(\omega) & S_{xy,xz}(\omega) & S_{xy,yz}(\omega) \\ S_{xz,x}(\omega) & S_{xz,y}(\omega) & S_{xz,z}(\omega) & S_{xz,xy}(\omega) & S_{xz,xz}(\omega) & S_{xz,yz}(\omega) \\ S_{yz,x}(\omega) & S_{yz,y}(\omega) & S_{yz,z}(\omega) & S_{yz,xy}(\omega) & S_{yz,xz}(\omega) & S_{yz,yz}(\omega) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Phi_{i,j}^{\sigma} = \{s_x \ s_y \ s_z \ s_{xy} \ s_{xz} \ s_{yz}\}^t$$

Per quanto riguarda gli ingressi \mathbf{u} del sistema linearizzato questi possono essere indifferentemente espressi in termini di forze, spostamento, velocità ed accelerazione. Vista la difficoltà della filosofia dei codici multicorpo a gestire nella procedura di linearizzazione e definizione delle matrici di stato ingressi espressi in termini di spostamento, velocità ed accelerazione si è definita, in presenza di tali ingressi, una metodologia che prevede una serie di passaggi aggiuntivi per l'ottenimento della matrice $\mathbf{S}(\omega)$. A partire dalla già descritta procedura, pensata per ingressi espressi in termini di forza ($\mathbf{G}_x(\omega)$), l'approccio alternativo persegue l'obiettivo di ottenere la matrice $\mathbf{H}_q(\omega)$ a partire da ingressi in termini di spostamento e la matrice $\mathbf{G}_x(\omega)$ a partire dall'analoga espressa in termini di spostamento $\mathbf{G}_y(\omega)$. Utilizzando le note relazioni che legano in un sistema MIMO (Multi-Input/Multi-Output) l'ingresso all'uscita [1], ipotizzando nota la matrice Power Spectral Density degli n ingressi espressi in termini di spostamento $\mathbf{G}_y(\omega)$, in generale parzialmente correlati, è possibile, nota che sia la matrice $\mathbf{H}_{xy}(\omega)$ ($n \times n$) delle funzioni di risposta in frequenza definita a partire da n generici ingressi espressi in termini di forza e con uscite il campo di spostamenti in corrispondenza dei punti di applicazione delle forze, ottenere la $\mathbf{G}_x(\omega)$ attraverso la relazione seguente:

$$\mathbf{G}_x = (\mathbf{H}'_{xy})^{-1} \cdot \mathbf{G}_y \cdot (\mathbf{H}_{xy})^{-1} \quad (7)$$

Proceduralmente, in questi casi, è necessario definire un sistema di ingressi espresso in termini di forze e momenti in corrispondenza dei gradi di libertà effettivamente da eccitare con il campo di spostamenti e prevedere un sistema di uscite ulteriore coincidente con il campo di spostamenti stesso. Attraverso la linearizzazione del sistema in forma state-space è poi possibile attraverso una relazione analoga alla (3) ottenere la $\mathbf{H}_{xy}(\omega)$. Passaggio delicato della procedura è ovviamente l'inversione della matrice delle funzioni di risposta in frequenza, la cui invertibilità non è sempre garantita. Nota la $\mathbf{G}_x(\omega)$ la procedura generale di ottenimento della $\mathbf{S}(\omega)$ assume di nuovo la consueta formulazione.

L'ottenimento di un tensore PSD di tensione quale quello illustrato con la (6) mette in luce due problemi fondamentali:

come utilizzare un tensore come la matrice $\mathbf{S}(\omega)$, che presenta oltre ai termini di auto-correlazione, in generale, termini di cross-correlazione tra le componenti del tensore di tensione, nei consolidati criteri di valutazione del danneggiamento a fatica sviluppati nel dominio della frequenza ?;

come individuare rapidamente le zone maggiormente sollecitate e, quindi, probabilmente maggiormente danneggiabili prima di affrontare la valutazione del danneggiamento attraverso il più idoneo criterio in frequenza ?.

Questi quesiti rappresentano problematiche di elevato interesse scientifico soprattutto ora che i metodi di valutazione in frequenza hanno assunto rilevanza anche in certi settori dell'attività

industriale dove la progettazione di componenti e sistemi meccanici fa imprescindibilmente uso di modelli di simulazione dinamica agli elementi finiti e di tipo multicorpo.

In questo lavoro si è cercato oltre che di individuare una metodologia di valutazione del tutto generale del tensore $\mathbf{S}(\omega)$ in un generico punto del generico componente facendo uso della modellazione multicorpo anche di dare risposta ai due precedenti quesiti sia ideando criteri originali sia sposando approcci sviluppati da altri ricercatori.

3. DEFINIZIONE DI UN CRITERIO PER L'INDIVIDUAZIONE DELLE ZONE MAGGIORMENTE SOLLECITATE

Alla seconda delle due domande poste nel paragrafo 2 si è risposto attraverso l'ulteriore risultato del lavoro cioè attraverso la definizione di un criterio di scelta della regione più sollecitabile del componente.

L'idea è quella di utilizzare il principio della combinazione modale utilizzando come pesi della combinazione le coordinate lagrangiane opportunamente trattate ed adottando un criterio di sovrapposizione modale noto in letteratura come criterio di *Gupta* [10] o metodo *SRSS*.

Si definisce una matrice \mathbf{R}_q di $m \times m$ componenti il cui generico elemento rappresenta il valor quadratico medio del corrispondente elemento della PSD \mathbf{G}_q :

$$R_{qij} = \sqrt{\int_0^{\infty} G_{qij}(\omega) \cdot d\omega} \quad (8)$$

Essendo in generale la matrice PSD \mathbf{G}_q definita complessa si considera il valore assoluto della \mathbf{R}_q . Applicando il criterio di sovrapposizione prima citato nell'ipotesi di coordinate lagrangiane \mathbf{q} e, quindi, di modi indipendenti, accettabile per un criterio qualitativo quale quello che si sta descrivendo, la configurazione più sollecitata risulta dalla seguente combinazione in cui \mathbf{R} rappresenta il vettore risultato della generica combinazione modale e Φ è la matrice modale corrispondente:

$$\mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^m (R_{qii} \cdot \Phi_i)^2 \right)^{1/2} \quad (9)$$

Quest'ultima operazione è di facile realizzazione in qualsiasi ambiente di calcolo strutturale perché ottenibile da una semplice combinazione dei load cases, rappresentati dalle forme modali ottenute per la generazione del modello modale del componente flessibile; il risultato è fruibile sia in termini di configurazione deformata che di stato di sollecitazione. L'analisi per ciascun singolo elemento dello stato di tensione risultante dalla combinazione, espresso ad esempio attraverso la tensione di *von Mises* (R_{VM}), rappresenta uno strumento di facile individuazione delle zone maggiormente sollecitate e, quindi, danneggiabili.

4. VALUTAZIONE DEL DANNEGGIAMENTO A FATICA A PARTIRE DAL GENERICO TENSORE PSD DI TENSIONE $\mathbf{S}(\omega)$

La risposta al primo dei quesiti posti nel paragrafo 2 risulta di particolare interesse anche alla luce dei risultati sia teorici [11-13] che sperimentali [14] ottenuti da alcuni ricercatori che individuano nei termini di cross-correlazione della matrice PSD di tensione $\mathbf{S}(\omega)$ termini di particolare importanza nella valutazione del comportamento a fatica.

L'approccio seguito dagli autori è stato sviluppato a partire dalle conclusioni di *Preumont* [15-16], il quale sviluppa una nuova definizione della tensione di *von Mises* pensata come processo di tipo random, utilizzando il criterio di *Dirlik* [2] per la valutazione dello spettro di carico e la regola di *Miner* per la valutazione del danneggiamento a fatica.

4.1. Definizione della “Equivalent von Mises Stress (EQVM)”

Con l’approccio di *Preumont* si sintetizza lo stato di tensione generico espresso dalla $\mathbf{S}(\omega)$ in termini della cosiddetta “*equivalent von Mises stress*” o tensione di *von Mises* equivalente.

Per uno stato di tensione generico la tensione di *von Mises* s_c è definita dalla seguente relazione quadratica espressa in funzione delle componenti del tensore di tensione s .

$$s_c^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - (s_x s_y + s_x s_z + s_y s_z) + 3 \cdot (s_{xy}^2 + s_{xz}^2 + s_{yz}^2) \quad (10)$$

Nella (10) viene definita la tensione di *von Mises*, indicata con s_c , mediante le componenti del generico vettore dello stato tensionale $s_x, s_y, s_z, s_{xy}, s_{xz}, s_{yz}$. Indicando il vettore di tensione con $\mathbf{s} = \{s_x, s_y, s_z, s_{xy}, s_{xz}, s_{yz}\}^t$ l’equazione (10) può essere riscritta come segue:

$$s_c^2 = \mathbf{s}^t \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{s} = \text{Trace}\{\mathbf{Q}[\mathbf{s}\mathbf{s}^t]\} \quad (11)$$

con:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Valutando il valor atteso della (11) si ottiene:

$$E[s_c^2] = \text{Trace}\{\mathbf{Q}E[\mathbf{s}\mathbf{s}^t]\} \quad (13)$$

avendo indicato con $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^t]$ la covarianza del vettore di tensione \mathbf{s} questa è legata alla matrice PSD $\mathbf{S}(\omega)$ del vettore di tensione dalla seguente relazione:

$$E[\mathbf{s}\mathbf{s}^t] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega) \cdot d\omega \quad (14)$$

$\mathbf{S}(\omega)$ caratterizza completamente uno stato di tensione random gaussiano a media zero per definizione. Il termine $E[s_c^2]$ è il valor quadratico medio della tensione di *von Mises* ed è legato alla sua funzione Power Spectral Density G dalla seguente relazione.

$$E[s_c^2] = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot d\omega \quad (15)$$

Combinando la (13) con la (15) si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Trace}\{\mathbf{Q}\mathbf{S}(\omega)\} \cdot d\omega \quad (16)$$

Tale espressione è esatta e non assume nessuna assunzione. Attraverso questa relazione si definisce appunto la “*tensione di von Mises equivalente (EVMS)*” come:

$$G(\omega) = \text{Trace}\{\mathbf{Q}\mathbf{S}(\omega)\} \quad (17)$$

Trasferendo l'approccio descritto alla valutazione numerica dello stato tensionale mediante approccio FEM e MBS la (5) può essere riscritta mediante la seguente espressione, nella quale i pedici i e j si riferiscono alle componenti del vettore di tensione del generico elemento:

$$S_{ij}(\omega) = \sum_{r,s} \Phi_{r,i}^{\sigma} \Phi_{s,j}^{\sigma} G_{q_{rs}}(\omega) \quad (18)$$

Essendo anche la (17) riscrivibile in termini di componenti di ogni singolo elemento della matrice PSD $\mathcal{S}(\omega)$ come segue:

$$G(\omega) = Trace\{\mathcal{Q}\mathcal{S}(\omega)\} = \sum_{i,j} Q_{ij} S_{ij}(\omega) \quad (19)$$

Allora si ottiene quanto segue, indicando con i pedici r ed s l'indice delle m coordinate lagrangiane:

$$G(\omega) = \sum_{r,s} G_{q_{rs}}(\omega) \cdot \sum_{i,j} Q_{ij} \Phi_{r,i}^{\sigma} \Phi_{s,j}^{\sigma} = \sum_{r,s} G_{q_{rs}}(\omega) \cdot A_{rs} \quad (20)$$

con:

$$A_{rs} = \sum_{i,j} Q_{ij} \cdot \Phi_{r,i}^{\sigma} \Phi_{s,j}^{\sigma} \quad (21)$$

Valutando per ogni elemento o nodo del modello la matrice A ($m \times m$) costituita da valori ottenuti applicando al tensore delle tensioni modali Φ^{σ} la regola di *von Mises* (10) si ottiene la funzione $G(\omega)$ (22), PSD della *EVMS*, in maniera alternativa alla (17) ed alla (19).

$$G(\omega) = \sum_{r,s} G_{q_{rs}}(\omega) \cdot A_{rs} \quad (22)$$

4.2 Definizione di un criterio alternativo per l'individuazione delle zone maggiormente sollecitate

A partire dalla tensione di *von Mises* equivalente si è definito un ulteriore criterio per l'individuazione delle zone maggiormente sollecitate, preliminare alla scelta ed all'utilizzo di un qualsivoglia criterio di valutazione in frequenza del danneggiamento a fatica.

Il criterio consiste nella valutazione per ogni elemento del valor quadratico medio R_G della PSD di tensione espressa in termini di *EQVM* $G(\omega)$ (23); è così possibile avere una rappresentazione globale dello stato di sollecitazione individuando così le zone più sollecitate.

$$R_G = \sqrt{\int_0^{\infty} G(\omega) \cdot d\omega} \quad (23)$$

5. IMPLEMENTAZIONE E VERIFICA DELLE METODOLOGIE

Le metodologie descritte sono state sviluppate ed implementate in un particolare ambiente di calcolo numerico (*Matlab*) e strutturale (*MSC/Nastran*, *MSC/Adams*) e successivamente verificate utilizzando come test case un semplice modello multicorpo di riferimento.

5.1 Test case

Il modello multicorpo preso come caso di prova è rappresentato in figura 1. E' un semplice modello di piastra ad L, di dimensioni descritte in figura 2 realizzata in acciaio e di spessore pari a 5 mm, supportata agli estremi da due sistemi molla/smorzatore (SD) e vincolata sia internamente che esternamente come rappresentato in figura. La rigidità delle due molle è di 1000 N/mm, e lo smorzamento dei due smorzatori è di 0.01 N·s/mm.

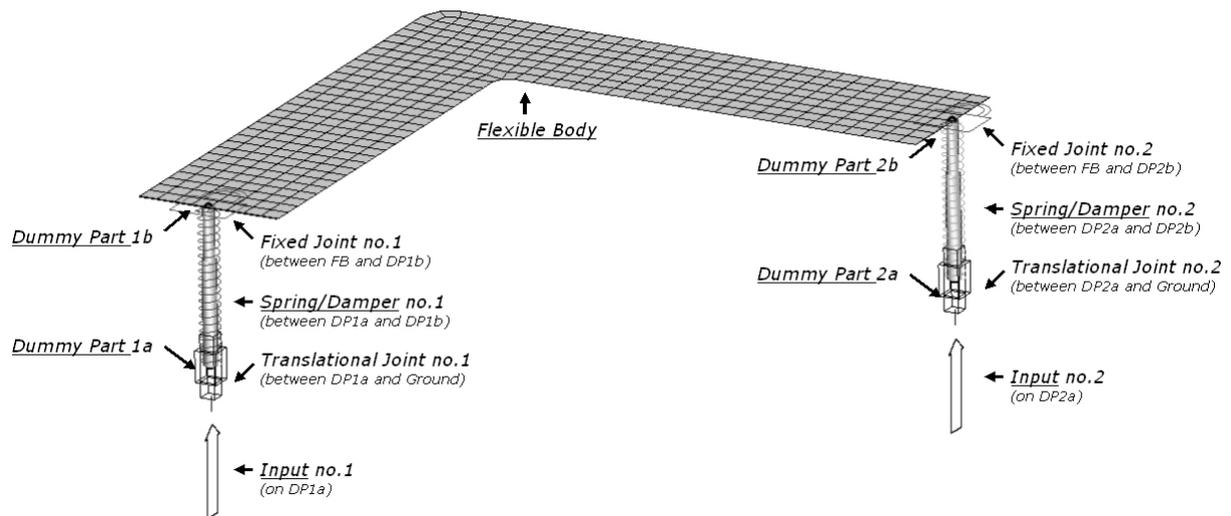


Fig. 1 – Rappresentazione del modello multicorpo utilizzato

Il sistema è costituito in realtà, come ben raffigurato in figura 1, oltre che dalla parte flessibile (*Flexible Body* o FB) anche da quattro parti di massa trascurabile (*Dummy Part* o DP) che consentono il collegamento interno tra FB e DP1b/DP2b e quello esterno tra DP1a/DP2a ed il riferimento assoluto (*Ground* o G).

Il modello modale di piastra è stato realizzato a partire da un modello FEM caratterizzato da 431 elementi, utilizzando una procedura di sintesi modale consolidata quale quella di *Craig-Bampton* [17] e considerando i lati estremi di vincolo infinitamente rigidi. Lo smorzamento assegnato al modello modale è di tipo percentuale, costante per tutti i modi e pari al 2%. Complessivamente il modello modale ha 32 gradi di libertà.

L'eccitazione è stata fornita in termini di accelerazione in corrispondenza di due posizioni (DP1a/DP2a) in direzione verticale (direzione normale al piano principale della piastra) utilizzando una matrice PSD $G_y(\omega)$ (2×2) definita a partire da una stessa funzione PSD $G_a(\omega)$ di valore pari a $100 \text{ (m/s}^2\text{)}^2/\text{Hz}$, costante nel range $1 \div 500 \text{ Hz}$. Si sono considerate le ipotesi sia di ingressi completamente correlati sia l'ipotesi di ingressi completamente

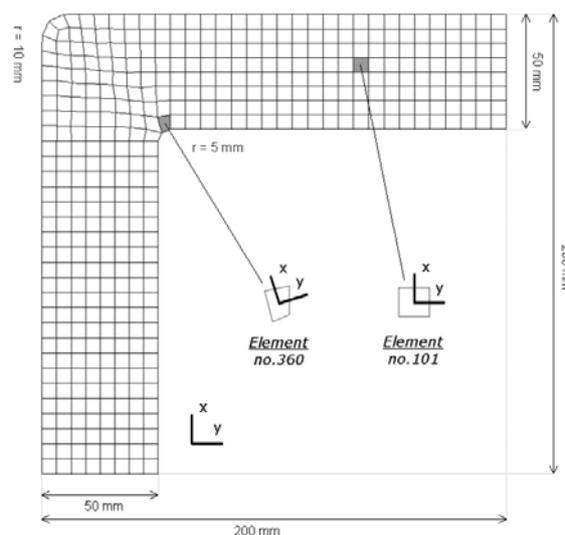


Fig. 2 – Rappresentazione geometrica e FEM della parte flessibile

scorrelati.

Per la piastra si è considerato un acciaio con tensione di rottura $S_{ur}=500$ Mpa . Per quanto riguarda il comportamento a fatica si è adottata la seguente formulazione della curva di *Wöhler* $S=\alpha N^\beta$, in cui S rappresenta la componente alterna della tensione e N il numero di cicli a rottura. Le costanti del materiale sono $\alpha=1012.25$ MPa, e $\beta=-0.1174$. Il valore limite a fatica della tensione alterna $S_e=0.4 \cdot S_{ur}$ è raggiunto dopo $N=1 \times 10^6$ cicli .

Il danneggiamento è stato valutato utilizzando il criterio di *Dirlik* [2], per la valutazione dello spettro di carico, e la regola di *Miner* per la valutazione del danneggiamento a fatica.

Utilizzando la procedura implementata si è individuata la matrice R_q ; per ogni elemento, sulla sua faccia superiore (individuata dalla direzione positiva dell'asse verticale), è poi stato ottenuto il valore di R_{VM} , la matrice $S(\omega)$, la funzione $G(\omega)$, il valore R_G ed infine il danneggiamento.

5.2 Analisi dei risultati

In figura 3 sono riportati, a titolo di esempio, gli andamenti della funzione $G(\omega)$, per gli elementi evidenziati in figura 2 (n.101 e n.360), rappresentativi rispettivamente di tipiche condizioni di stato di tensione monoassiale e biassiale. Vengono inoltre riportati gli andamenti dei termini (1,1) e (1,2) della matrice $S(\omega)$ (6) PSD del tensore di tensione valutato nel sistema di riferimento locale dell'elemento (fig.2). In particolare l'elemento n.360 è, alla luce della valutazione del danneggiamento a fatica, l'elemento più danneggiato del modello sia nella condizione di sollecitazione con ingressi completamente correlati che scorrelati.

In figura 4 sono invece rappresentate le mappe ottenute in termini di danneggiamento nell'unità di tempo ed in termini di stato tensionale equivalente. Per quest'ultimo sono riportate la mappa espressa in termini di tensione di *von Mises* ottenuta mediante il criterio di sovrapposizione sviluppato dagli autori (R_{VM}) e la mappa espressa in termini di "equivalent von Mises stress (EQVM)" (R_G).

L'analisi del comportamento a fatica del componente appartenente al sistema considerato, rappresentativo comunque di un generico ed in generale più complesso modello multicorpo, ha dimostrato la robustezza della procedura implementata nonché la sua efficacia. Ha messo in luce come la matrice $S(\omega)$ del generico elemento del componente sia in generale piena caratterizzata da termini di cross-correlazione anche non in presenza di correlazione tra gli ingressi al sistema. Alla luce di queste considerazioni risulta evidente come l'approccio di *Preumont* adottato dagli autori costituisca una valida risposta al quesito di come gestire una matrice $S(\omega)$ piena al fine di adottare uno dei consolidati approcci in frequenza alla valutazione del danneggiamento a fatica del componente, al fine di non trascurare tutte le informazioni contenute nella matrice stessa [13-14]. Si è verificata, inoltre, la bontà dei metodi di individuazione delle zone maggiormente sollecitate sviluppati nel lavoro. Dall'analisi dei risultati riportati in figura 4 è possibile osservare la rispondenza qualitativa tra l'informazione ottenuta in termini di danneggiamento nell'unità di tempo e quella fornita tramite mappa espressa in termini di R_{VM} dal primo criterio. Stessa e forse maggiore rispondenza è ovviamente individuabile utilizzando il secondo criterio (mappa in termini di R_G). Le informazioni fornite dai due criteri sono confrontabili tra loro in termini quantitativi. E' interessante però sottolineare come, mentre il criterio, che origina dalla valutazione della combinazione modale mediante stima dei valori rms delle funzioni PSD delle coordinate lagrangiane, necessità di tempi di calcolo brevissimi, non quantificabili sia per quanto riguarda l'ottenimento del vettore dei coefficienti di combinazione, sia per quanto riguarda la combinazione vera e propria da demandare al codice di calcolo agli elementi finiti, l'altro, che manipola la matrice PSD espressa in termini di EQVM, necessità di un elevato tempo di calcolo funzione del numero di elementi e comparabile con il tempo di valutazione del danno.

6. CONCLUSIONI

In questo lavoro si è individuata una metodologia del tutto generale di valutazione del tensore PSD di tensione $\mathcal{S}(\omega)$ di un generico componente meccanico facendo uso della modellazione multicorpo e dell'approccio modale alla modellazione di parti flessibili. Inoltre, è stato ideato un criterio di prima valutazione delle zone del componente maggiormente sollecitabili analizzando le PSD delle coordinate lagrangiane ed utilizzando un classico criterio di combinazione modale. Si è inoltre adottato un criterio di sintesi di tensori PSD di tensione al fine di valutare uno stato di tensione monoassiale equivalente (*equivalent von Mises stress* –

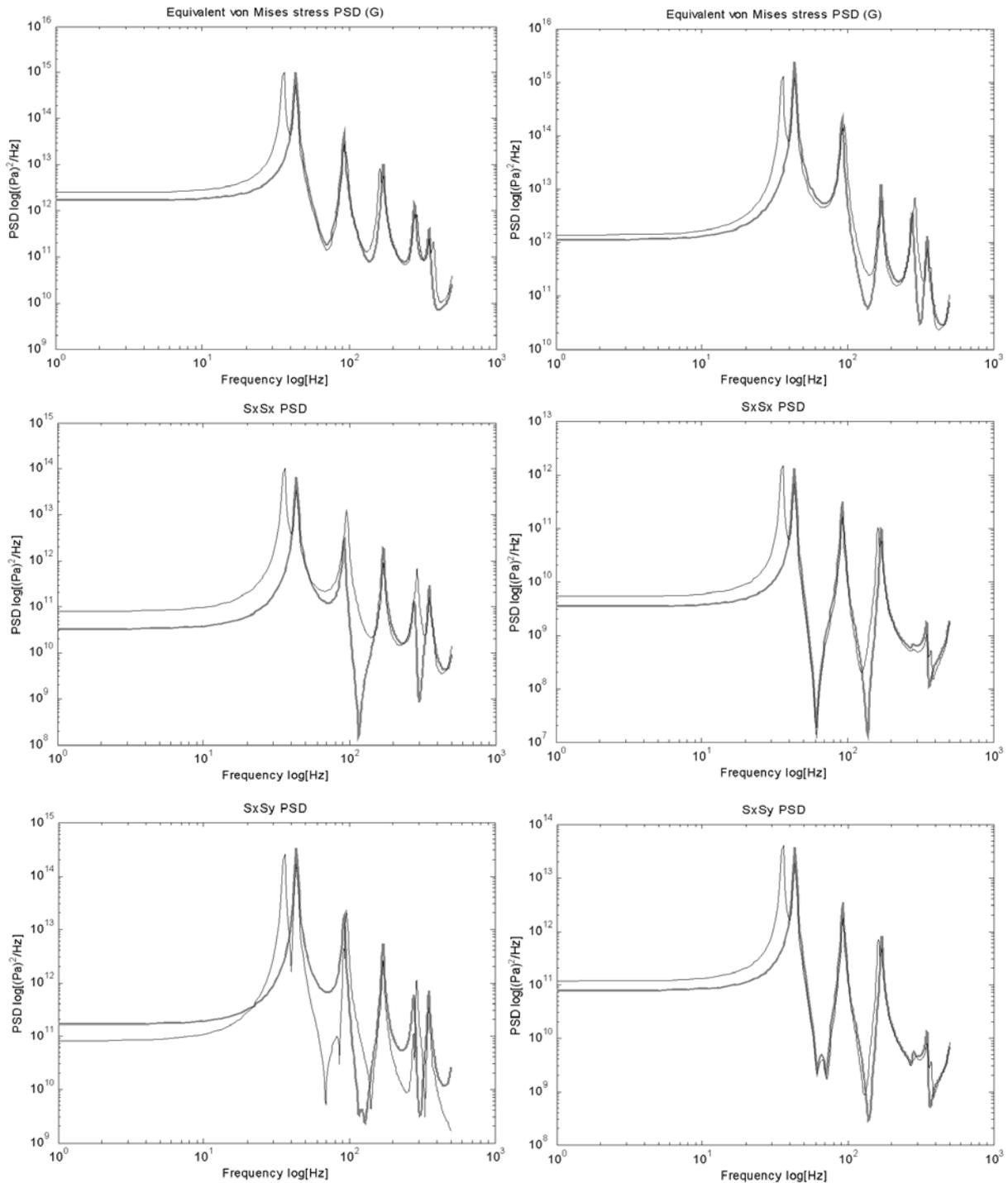


Fig. 3 – Andamenti di alcune funzioni PSD per gli elementi n.360 (colonna di sinistra) e n.101 (colonna di destra); ingressi completamente correlati (—) ed ingressi scorrelati (---).

Preumont [15-16]). La procedura è stata implementata e verificata su di un modello multicorpo di riferimento dimostrando la sua robustezza. Inoltre, si è verificata la bontà del metodo di individuazione delle zone maggiormente sollecitate sviluppato nel lavoro, anche alla luce della velocità di ottenimento della mappa in termini di R_{VM} delle zone critiche. La ricerca si è ora focalizzata sulle modalità di utilizzo dei criteri PSD consolidati [18] in presenza di condizioni di sollecitazione di tipo multiassiale, ossia, in presenza di matrici $S(\omega)$

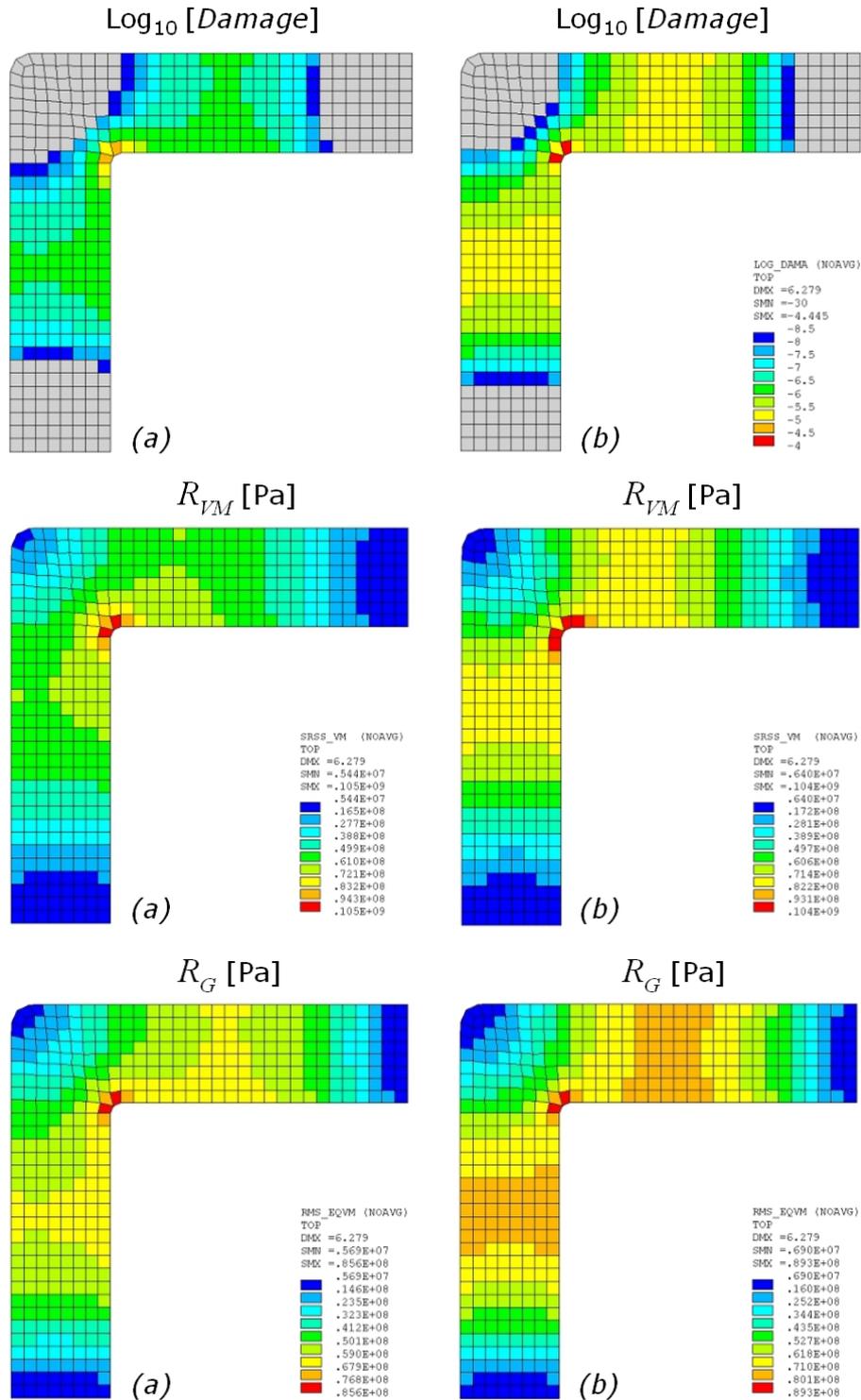


Fig. 4 – Mappe del danneggiamento nell'unità di tempo, di R_{VM} e di R_G per le analisi con ingressi completamente correlati (a) ed ingressi scorrelati (b)

piene; si sta rivolgendo particolare attenzione all'analisi degli approcci presenti in letteratura [19] ed all'eventuale sviluppo di altri volti a tradurre nel dominio della frequenza i criteri di valutazione del danneggiamento di tipo multiassiale sviluppati nel dominio del tempo [20].

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Bendat, A. Piersol, Random data analysis and measurement procedures, Wiley Interscience;
- [2] M. Haiba, D.C. Barton, P.C. Brooks, M.C. Levesley, "Review of life assessment techniques applied to dynamically loaded automotive components", *Computer and structures*, Vol. 80, 2002, pp. 481-494;
- [3] N.W.M. Bishop, "A theoretical solution for the estimation of Rainflow ranges from power spectral density data", *Fatigue fracture Engineering Materials and structures*, Vol.13, 4, 1990, pp 311-326;
- [4] C. Braccesi, F. Cianetti, "Sviluppo e verifica sperimentale di una procedura di valutazione virtuale dello stato di sollecitazione di componenti meccanici in campo automobilistico", *Atti del XXXI Convegno Nazionale AIAS*, Parma, 2002;
- [5] N.W.M. Bishop, F. Sherratt, Finite element based fatigue calculations, NAFEMS Ltd., 2000;
- [6] V.B. Kottgen, M.E. Barkey, D.F. Socie, "Structural stress-strain analysis on non-proportional loading suitable for FEM-postprocessing", *Proceedings of fatigue design'95*, Helsinki, Finland, 1995
- [7] F. Ambrogi, C. Braccesi, F. Cianetti, "Valutazione dello stato tensionale di elementi strutturali mediante sintesi modale", *Atti del XXIX Convegno Nazionale AIAS*, Lucca, 2000;
- [8] A.A. Shabana, "Flexible Multibody Dynamics: Review of past and recent developments", *Multibody system dynamics*, Vol.1, 1997, pp.189-222;
- [9] W. Schiehlen, "Multibody Systems Dynamics: Roots and perspective", *Multibody system dynamics*, Vol.1, 1997, pp.149-188;
- [10] A.K. Gupta, D.C. Chen, "A simple method of combining modal responses", *Trans. 7th Int. Conf. Struct. Mech. Reactor Tech.*, Chicago, K3/10, 1983;
- [11] A. Preumont, Random vibration and spectral analysis, Kluwer Academic Publishers;
- [12] P.H. Wirshing, T.L. Paez, H. Ortiz, Random vibrations, Wiley Interscience;
- [13] T. Lagoda, E. Macha, "Simulation of cross-correlation effect on biaxial random fatigue", *Proceedings of Fatigue '93*, Montreal, 1993;
- [14] T. Lagoda, E. Macha, A. Dragon, J. Petit, "Influence of correlations between stresses on calculated fatigue life of machine elements", *Int. J. Fatigue*, Vol.18, 8, 1996, pp.547-555;
- [15] A. Preumont, V. Piefort, "Predicting Random High-Cycle Fatigue Life with Finite elements", *J. Vibr. Acoustics*, Vol. 116, 1994, pp.245-248;
- [16] X. Pitoiset, A. Preumont, "Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures", *Int. J. Fatigue*, Vol. 22, 2000, pp.541-550;
- [17] R.R. Craig, M.C.C. Bampton, "Coupling of substructures for dynamic analyses", *AIAA Journal*, Vol. 6, 7, 1968;
- [18] G. Lori, D. Pioli, "Comportamento a fatica di componenti meccanici soggetti a sollecitazioni random: analisi critica dei metodi in frequenza", *Atti del XXXII Convegno Nazionale AIAS*, Salerno, 2003;
- [19] X. Pitoiset, I. Rychlik, A. Preumont, "Spectral methods to estimate local multiaxial fatigue failure for structures undergoing random vibrations", *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol.24, 2001, pp.715-727;
- [20] D.F. Socie, G.B. Marquis, Multiaxial fatigue, Soc. of Automotive Engineers Inc., 2000.