

SESSIONE G□ PROGETTAZIONE MECCANICA
--

**SVILUPPO DI UNA NUOVA METODOLOGIA DI RISOLUZIONE
DELLO STATO DI TENSIONE E DEFORMAZIONE DI TRAVI
CURVE ATTRAVERSO TECNICHE MESHLESS**

C. Braccesi, L. Landi

*Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università degli Studi di Perugia,
Via G. Duranti 1 - 06125 Perugia, e-mail:l.landi@unipg.it*

SOMMARIO

La limitata integrazione fra le fasi di Computer Aided Design (CAD) e Computer Aided Engineering (CAE) durante la progettazione di nuovi componenti meccanici rimane uno dei maggiori limiti nella riduzione del tempo di progettazione di nuovi prodotti.

Attualmente l'esame dello stato di tensione-deformazione dei componenti viene effettuato attraverso metodi agli elementi finiti (FEM) che hanno bisogno di lunghi tempi di mesh. Negli ultimi anni sono state sviluppate alcune metodologie, raggruppate generalmente sotto l'acronimo meshless, che tendono ad integrare le due fasi di progettazione citate attraverso approcci ibridi geometrico - fisici. Allo stato attuale della ricerca non si trovano però approcci atti a modellare geometrie che simulino correttamente il campo di tensione deformazione della geometria stessa a partire soltanto dalle informazioni date dalla descrizione CAD.

In questo articolo viene presentata la fattibilità di una nuova metodologia meshless che, utilizzando la formulazione del continuo tramite B-Spline, giunge alla soluzione del problema dello stato di tensione-deformazione per le travi curve. L'estensione di questo metodo per alle geometrie biparametriche ed i solidi è in fase di sviluppo. La metodologia presentata si è in grado di giungere alla soluzione in tutti i test effettuati e l'adeguatezza della soluzione è risultata essere funzione, come per tutti i metodi approssimanti, della descrizione geometrica delle parti e dalle particolari condizioni di carico. Il metodo è risultato essere efficace anche nella risoluzione del problema delle vibrazioni libere di travi qualsiasi.

1. INTRODUZIONE

Il modello CAD di un nuovo prodotto contiene, già dalle prime fasi di modellazione, informazioni dimensionali e topologiche in grado di descrivere completamente la geometria dell'oggetto che si intende studiare.

Successivamente alla fase iniziale di modellazione viene condotta una fase di simulazione prestazionale del componente, virtualmente sottoposto alle condizioni operative reali, con lo scopo di verificarne la rispondenza della forma inizialmente assegnata alle specifiche progettuali imposte.

Il limite di tale processo risiede nella difficile integrazione delle due fasi descritte in quanto, specialmente nella fase di simulazione dello stato di tensione - deformazione, l'analisi consiste nella risoluzione di problemi fisici retti da sistemi di equazioni differenziali "vincolate" con condizioni al contorno. Il tipico approccio FEM necessita di una discretizzazione del modello geometrico CAD, in accordo con le procedure tipiche del metodo (si veda ad esempio [1]).

La fase di mesh della struttura, risulta essere comunque molto dispendiosa sia in termini di tempi che di risorse e necessita di personale altamente specializzato. Negli ultimissimi anni sono state sviluppate a livello internazionale alcune ricerche riguardanti la possibilità di integrare la fase di modellazione e quella di simulazione FEM utilizzando una serie di metodi che possono essere raggruppati sotto l'acronimo "metodi meshless" [2].

L'idea di base di tutti questi metodi, che si differenziano poi per la trattazione matematica risolutiva del metodo stesso, è quella di voler approssimare una funzione matematica esatta $u(x)$ definita in un dominio Ω attraverso l'integrazione numerica di valori approssimanti la funzione stessa $u(t)$ in un set di nodi x_t , $t=1, \dots, n$ appartenenti al dominio Ω (figura 1).

In tutti i metodi meshless viene definita una funzione peso w , diversa da zero nel dominio Ω_i di influenza di ogni nodo (supporto compatto), che regola l'influenza dovuta al nodo x_t nel calcolo dell'integrale della funzione approssimata $u^t(x)$ al variare del punto x in cui si voglia calcolare la funzione:

$$u^t(x) = \int_{\Omega} w_{\Omega_i} u(t) d\Omega \quad (1)$$

La funzione peso, pur essendo costruita in vario modo a seconda del metodo, risulta essere generalmente una funzione il cui valore decresce all'aumentare della distanza del punto corrente di integrazione \tilde{x} dal nodo x_t di definizione della funzione stessa.

I metodi meshless, dopo aver dimostrato le condizioni di convergenza della soluzione approssimata a quella esatta (*condizioni di consistenza*), usano i funzionali sviluppati per trovare la soluzione di varie equazioni differenziali parziali rappresentanti i più disparati fenomeni fisici quali problemi di trasmissione del calore e stati deformativi [3-4]. Utilizzando questa metodologia in modo corretto, si riescono a descrivere i problemi fisici attraverso formulazioni energetiche imponendo alla soluzione generale del problema le condizioni al contorno (A in figura 1).

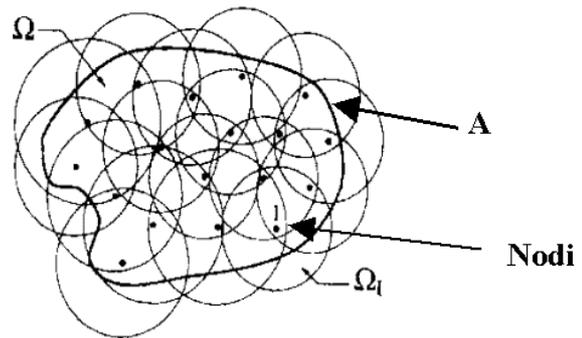


Fig. 1 Dominio di definizione delle funzioni Ω e domini di influenza dei t nodi Ω_i

2. DESCRIZIONE GENERALE DEL PROBLEMA IN TERMINI DI SPAZIO DUALE

Allo stato attuale della ricerca non si trovano approcci atti a simulare il campo di tensione-deformazione della geometria stessa sottoposto a carichi noti a partire soltanto dalle informazioni geometriche date dalla descrizione CAD stessa. Nella presente ricerca si sono utilizzati i concetti appena esposti per la risoluzione del problema dello stato di tensione - deformazione dei sistemi di travi piane ad asse curvilineo [5]. Durante la fase di modellazione CAD vengono infatti create delle geometrie (B-Spline o NURBS), atte a rappresentare l'asse della trave stessa, e che possono essere efficacemente usate per la costruzione automatica delle funzioni di peso w direttamente dalle informazioni topologiche della geometria stessa (*funzioni di miscelamento*).

Utilizzando la terminologia in [6] si tratta quindi di trasportare le caratteristiche di tensione - deformazione della trave nello spazio *duale* rappresentato dalle stesse caratteristiche descritte secondo gli spostamenti dei punti del poligono di controllo delle B-Spline [7]. La traslazione dallo spazio fisico a quello duale sarà effettuata attraverso le funzioni di miscelamento delle B-Spline (pesi w) che descrivono in modo continuo il legame fra la deformazione dell'asse della trave e gli spostamenti dei gradi di libertà duali:

Supponendo quindi nota dall'ambiente CAD la geometria della linea d'asse indeformato, questa potrà essere descritta da una B-Spline di ordine k e con $n + 1$ punti di controllo P_0, P_1, \dots, P_n :

$$\mathbf{P}(t) = \sum N_{i,k}(t) \cdot \mathbf{P}_i \quad , \quad (2)$$

Dove il parametro t è variabile nell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_{n+k}$, cioè fra il primo e l'ultimo termine del vettore dei nodi $[t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{n+k}]$. Dalla precedente relazione vettoriale si deducono le due relazioni scalari per le coordinate, nel piano xy , dei punti della linea d'asse:

$$\begin{cases} x(t) = \sum N_{i,k}(t) \cdot x_i \ , \\ y(t) = \sum N_{i,k}(t) \cdot y_i \ . \end{cases} \quad (3)$$

in cui (x_i, y_i) rappresentano le coordinate nello stesso piano del punto di controllo i -esimo (\mathbf{P}_i) che divengono i gradi di libertà dalla trave stessa (DOF). Si può notare che, in questa trattazione, non sono presenti gradi di libertà rotazionali che andranno descritti in altro modo tramite relazioni tra i DOF traslazionali.

Il problema risulta essere schematizzabile secondo:

- descrivere il potenziale totale (ξ) della trave sottoposta ad un sistema di forze esterne secondo il sistema duale utilizzando la teoria della trave elastica lineare imponendo le equazioni di congruenza e di legame elastico; per piccole deformazioni si riesce a descrivere il sistema trave tramite un *sistema duale invariante equivalente* attraverso un sistema di *molle duali* che collegano i punti di poligono di controllo sottoposte ad un sistema di *forze duali*;
- ricavare, per la particolare condizione di vincolo fisico, le *equazioni di vincolo duali* sul sistema dei punti del poligono di controllo;
- trovare una configurazione duale equilibrata fra tutte quelle congruenti tramite l'imposizione della minima variazione dell'energia totale.

Si capisce che, data la relazione matematica esistente fra lo spazio duale e quello fisico, la soluzione del problema energetico fisico può essere trovata in funzione degli spostamenti duale dei punti del poligono di controllo (DOF) che descrivono in modo continuo lo spostamento fisico della trave tramite le equazioni (1). Le sollecitazioni in ogni punto della trave stessa potranno essere facilmente espresse tramite le equazioni di legame elastico e quelle di equilibrio indefinito per la trave curva.

3. DESCRIZIONE DUALE DELL'ENERGIA TOTALE DELLA TRAVE CURVA

Siano u_i e v_i gli spostamenti, rispetto agli assi x ed y del riferimento globale, del generico punto di controllo P_i dovuti alla deformazione duale, gli spostamenti u e v , nelle stesse direzioni, dei punti della linea d'asse hanno un'espressione formalmente identica a quella dell'equazione della curva (3):

$$\begin{cases} u(t) = \sum N_{i,k}(t) \cdot u_i, \\ v(t) = \sum N_{i,k}(t) \cdot v_i. \end{cases} \quad (4)$$

Accanto al sistema di riferimento globale xy si deve fare uso di un riferimento locale i cui assi sono orientati come il versore tangente \mathbf{t} ed il versore normale \mathbf{n} alla curva nel punto considerato. Il versore tangente è orientato concordemente al verso di percorrenza dell'ascissa curvilinea, mentre quello normale si ottiene ruotando il versore tangente di 90° in senso antiorario. In figura 2 sono raffigurati i versori \mathbf{t} e \mathbf{n} in due diversi punti di una stessa curva; nella stessa figura è individuato anche il centro di curvatura C e α l'angolo formato, in ogni punto, dal versore tangente \mathbf{t} con il verso positivo di x .

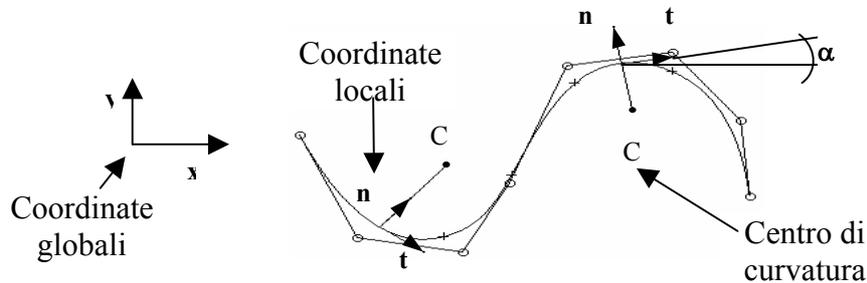


Fig. 2 - Riferimenti globale (x, y) e locale (t, n)

Si comprende che nell'energia potenziale totale devono intervenire le componenti locali dello spostamento, per cui, rispetto al caso della trave diritta, è richiesta l'individuazione delle componenti di spostamento nella direzione tangente e normale alla curva in ogni suo punto a partire dalle componenti globali. Seguendo la stessa simbologia usata dal Baldacci [5], siano indicati con u_s e u_r gli spostamenti, rispettivamente, tangenziali (concordi al verso di s ascissa curvilinea) e normali (in direzione radiale r). Le componenti di spostamento u_s e u_r nel riferimento associato ai versori \mathbf{t} e \mathbf{n} , si ottengono osservando che i due riferimenti sono ruotati l'uno rispetto all'altro dell'angolo α .

Da cui:

$$\begin{cases} u_s(t) = \cos\alpha \cdot \{N\}^T \cdot \{u\} + \sin\alpha \cdot \{N\}^T \cdot \{v\} \\ u_r(t) = -\sin\alpha \cdot \{N\}^T \cdot \{u\} + \cos\alpha \cdot \{N\}^T \cdot \{v\} \end{cases} \quad (5)$$

dove $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ sono funzioni note del parametro t .

Il potenziale totale del sistema trave può essere visto come $\xi = U + II$, inteso come la differenza tra il lavoro immagazzinato nella deformazione sotto forma di energia di

deformazione elastica U ed il lavoro delle forze esterne $L = -\dot{W}$ speso nella deformazione.

3.1 Energia di deformazione duale

Come noto l'energia di deformazione può essere scritta come:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{ \varepsilon_s \}^T \cdot \{ \sigma_s \} \cdot dV \quad (6)$$

in cui le componenti del tensore delle tensioni sono riordinate nel vettore $\{ \sigma_s \}$ mentre quelle di deformazione nel vettore $\{ \varepsilon_s \}$. Per la trave lineare elastica si hanno componenti di tensione ed di deformazione legate dall'equazione costitutiva:

$$\{ \sigma_s \} = E \cdot \{ \varepsilon_s \} \quad (7)$$

nella quale E rappresenta il modulo di elasticità normale del materiale. Sostituendo la (7) nella (6), trascurando il contributo alla deformazione dovuta al taglio ed esprimendo le $\{ \varepsilon_s \}$ di un punto qualsiasi della sezione trasversale in funzione delle caratteristiche di deformazione ε , e χ (assiale e flessionale) per la generica fibra baricentrica si giunge, ipotizzando che il raggio di curvatura della trave sia molto più grande della dimensione trasversale della sezione e che per la B-Spline sia $ds/dt = \text{costante}$, alla formulazione:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{ u \}^T \cdot [K_{uu}] \cdot \{ u \} + \frac{1}{2} \cdot \{ v \}^T \cdot [K_{vv}] \cdot \{ v \} + \{ u \}^T \cdot [K_{uv}] \cdot \{ v \} \quad (8)$$

dove $\{ u \}$ e $\{ v \}$ sono il vettore degli spostamenti dei punti del poligono di controllo e le $[K_{ij}]$ sono le matrici delle *molle duali*, che rappresentano la descrizione duale della rigidità elastica della trave. Esse sono esprimibili tramite funzioni ricavabili dalla configurazione indeformata della trave e, quindi, ricorrendo soltanto alle informazioni contenute nella descrizione geometrica CAD della sua linea d'asse. Se ad esempio si considera una trave rettilinea il contributo $[K_{uv}]$ sarà nullo (il contributo flessionale e assiale della deformazione sono indipendenti come sappiamo dalla teoria della trave rettilinea) mentre:

$$\begin{cases} [K_{uu}] = \frac{E \cdot A}{s'} \cdot \int \{ N' \} \cdot \{ N' \}^T \cdot dt \\ [K_{vv}] = \frac{E \cdot J}{(s')^3} \cdot \int \{ N'' \} \cdot \{ N'' \}^T \cdot dt \end{cases} \quad (9)$$

dove s' è la derivata prima dell'ascissa curvilinea rispetto al parametro t , $\{ N'' \}$ è il vettore delle derivate seconde delle funzioni di miscelamento (ricavabili dalle formule ricorsive che definiscono le funzioni di miscelamento stesse), A è l'area della sezione trasversale della trave e J è il suo momento di inerzia rispetto all'asse di flessione.

In funzione dell'ordine della B-spline e del numero dei punti del poligono di controllo (e quindi dal numero degli intervalli parametrici definiti dai nodi della B-Spline stessa) la matrice globale di rigidità duale (10) sarà più o meno sparsa.

$$[K_{tot}] = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] \end{bmatrix} \quad (10)$$

3.2 Lavoro delle forze esterne e forze duali

Anche per il calcolo del lavoro delle forze esterne L è opportuno collocarsi nel riferimento locale e , di conseguenza, ciascuna forza agente sulla struttura andrà valutata per le due componenti tangenziale F_s e radiale F_r . Il momento M non subisce alcuna trasformazione nel passaggio da un riferimento all'altro ed il lavoro da esso compiuto coinvolge la rotazione dovuta alla differenza fra l'inclinazione finale ed iniziale (α) della curva originaria.

Indicando con F_{si} , F_{ri} e M_i le sollecitazioni generiche sul punto della linea d'asse agenti sul punto al valore parametrico t_i e detto $\alpha_i = \alpha(t_i)$ l'inclinazione della curva nello stesso punto, il lavoro delle forze esterne risulterà la somma dei lavori compiuti dai vari carichi nei rispettivi punti di applicazione degli stessi (non scrivendo, per semplicità di trattazione, la presenza di eventuali carichi distribuiti):

$$L = \sum F_{si} \cdot u_s(t_i) + \sum F_{ri} \cdot u_r(t_i) + \sum M_i \cdot \theta(t_i) \quad (11)$$

Sostituendo le espressioni degli spostamenti valutate in t_i e separando poi la parte relativa agli spostamenti duali $\{u\}$ dalla parte che moltiplica gli spostamenti duali $\{v\}$, si ricava:

$$L = \{u\}^T \cdot \{f_u\} + \{v\}^T \cdot \{f_v\} \quad (12)$$

dove:

$$\begin{cases} \{f_u\} = \sum F_{si} \cdot \cos\alpha_i \cdot \{N(t_i)\} - \sum F_{ri} \cdot \sin\alpha_i \cdot \{N(t_i)\} - \sum M_i \cdot \frac{\sin\alpha_i}{s'} \cdot \{N'(t_i)\} \\ \{f_v\} = \sum F_{si} \cdot \sin\alpha_i \cdot \{N(t_i)\} + \sum F_{ri} \cdot \cos\alpha_i \cdot \{N(t_i)\} + \sum M_i \cdot \frac{\cos\alpha_i}{s'} \cdot \{N'(t_i)\} \end{cases} \quad (13)$$

E' immediato rilevare che l'equazione (12) rappresenta nel sistema duale lo stesso lavoro che le forze esterne producono nel sistema reale. Quindi i vettori $\{f_u\}$ e $\{f_v\}$ dell'equazione (13) possono essere interpretate come le forze duali applicate sui punti di controllo della B-Spline.

Si vuol far notare che, a causa della descrizione continua del modello fisico della trave, possono essere imposte forze esterne su di un punto qualsiasi della trave e non, come per i metodi agli elementi finiti (FEM), sui DOF che, nell'approccio meshless, non rappresentano alcun punto fisico se non in corrispondenza dell'inizio e della fine della trave stessa.

4. EQUAZIONI DI VINCOLO DUALI

Come precedentemente esposto l'approccio duale tramite meshless ha due caratteristiche principali:

- non prevede DOF rotazionali;
- è in grado di imporre, a causa della descrizione continua della trave dovuta alle B-Spline, condizioni di vincolo in un punto qualsiasi della trave rendendo il metodo molto più flessibile del metodo (FEM).

Nella descrizione dei vincoli duali dovremo quindi tradurre in termini duali le equazioni di vincolo tangenziale (direzione t), normale (direzione n), o rotazionale.

Si consideri l'i-esimo vincolo agente nel punto della curva associato al valore t_i del parametro; detta d_i la grandezza dello spostamento imposto, l'equazione di vincolo possiede una delle tre seguenti forme, si veda (5):

$$\begin{cases} \cos\alpha_i \cdot \{N(t_i)\}^T \cdot \{u\} + \sin\alpha_i \cdot \{N(t_i)\}^T \cdot \{v\} = d_i & \text{(vincolo n)} \\ -\sin\alpha_i \cdot \{N(t_i)\}^T \cdot \{u\} + \cos\alpha_i \cdot \{N(t_i)\}^T \cdot \{v\} = d_i & \text{(vincolo t)} \\ -\frac{\sin\alpha_i}{s'} \cdot \{N'\}^T \cdot \{u\} + \frac{\cos\alpha_i}{s'} \cdot \{N'\}^T \cdot \{v\} = d_i & \text{(vincolo rot)} \end{cases} \quad (14)$$

Gli spostamenti reali imposti dai vincoli comportano quindi delle relazioni di dipendenza fra spostamenti duali dei gradi di libertà. Le reazioni duali $\{R\}$, esplicitate dagli stessi vincoli per soddisfare l'equazione vincolare, possono essere viste come delle forze duali incognite aggiuntive che influenzano l'equilibrio del sistema duale.

Considerando un sistema con n vincoli esterni, i relativi spostamenti si possono scrivere n vincoli simili a quelli della (14) sintetizzabile in forma matriciale come nella relazione:

$$[C] \cdot \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} = \{d_i\} \quad (15)$$

Dove, se si hanno m punti del poligono di controllo, la matrice avrà dimensioni $[C]_{n \times 2m}$.

5. PRINCIPIO DI MINIMO ENERGETICO

Nel caso di m punti del poligono di controllo si impone la condizione di equilibrio del sistema tramite l'annullamento delle $2m$ derivate parziali dell'energia duale totale del sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}^T} = [K_{uu}] \cdot \{u\} + [K_{uv}] \cdot \{v\} - \{f_u\} = \{0\} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \{v\}^T} = [K_{uv}] \cdot \{u\} + [K_{vv}] \cdot \{v\} - \{f_v\} = \{0\} \end{cases} \quad (16)$$

E' da notare che, in generale per la trave curva, l'esistenza della sottomatrice $[K_{uv}]$ rende impossibile la costruzione di due sistemi separati, uno per le $\{u\}$ e l'altro per le $\{v\}$, perché l'equilibrio del sistema duale in una direzione dipende anche dagli spostamenti duali secondo l'altra direzione.

Tenendo conto anche delle n equazioni vincolari nelle incognite aggiuntive $\{R\}$ il sistema risolvete per la trave curva risulta essere composto da $2m+n$ equazioni:

$$\begin{bmatrix} [K_{tot}] & -[C]^T \\ [C] & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \\ \{d\} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

La matrice che moltiplica le variabili incognite è invertibile e la sua inversa consente di risalire agli spostamenti duali ed alle reazioni vincolari incognite. Dagli spostamenti duali si ottengono, tramite le funzioni di miscelamento, gli spostamenti della struttura e la configurazione finale di equilibrio. Tramite le equazioni di equilibrio si ottengono i grafici dello sforzo normale, taglio e momento flettente.

6. CONSIDERAZIONI SULL'APPROSSIMAZIONE DEL METODO ED ESEMPI

Per compiere delle semplici considerazioni sull'approssimazione fornita dal metodo si considererà il semplice caso di trave diritta doppiamente appoggiata agli estremi e si procederà alla discussione dei risultati.

Dalla la teoria delle B-Spline sappiamo che la continuità di una B-Spline di ordine k in un generico punto t_i dell'intervallo parametrico è di ordine C^{k-1} , nel caso particolare in cui nel punto t_i si abbia un *nodo* la continuità diviene C^{k-1-p} , dove p risulta essere la molteplicità del nodo in questione. Quindi nel caso in cui si considerino delle B-Spline con $k=4$, le curve saranno continue in curvatura C^3 (C^2 nei punti del vettore dei nodi con molteplicità singola). La trave sarà continua in freccia e rotazione ed avrà la possibilità di avere curvatura discontinua nei punti del *knot vector*.

Si consideri una trave ($l=2000\text{mm}$, $E=210000\text{ N/mm}^2$, $J=225000\text{mm}^4$) caricata tramite una forza $F=1000\text{N}$ nel punto di mezzeria. Come noto le reazioni vincolari saranno $T=500\text{N}$, il $M_{\max}=5 \times 10^5\text{ Nmm}$ e la freccia massima teorica, in mezzeria, risulta essere di $f=3,52\text{ mm}$.

Per ottenere la soluzione esatta nel nostro metodo dovremo permettere alla trave di essere di classe C^2 in prossimità della mezzeria (cioè dovremo avere un nodo per un valore dell'ascissa curvilinea $s=1000\text{ mm}$).

In figura 3 è rappresentata la configurazione indeformata e deformata di una trave modellata con $k=4$ e 5 punti del poligono di controllo con nodo in posizione $s=1000\text{mm}$; come si nota dai diagrammi si ottiene la soluzione esatta. Nella stessa figura si può notare anche la posizione deformata del poligono di controllo e la rappresentazione quantitativa delle forze duali calcolate.

Utilizzando lo spazio duale inoltre si riesce ad avere una soluzione, anche se approssimata, per un qualsiasi valore del punto di applicazione dei carichi senza dover eseguire un nuovo calcolo delle matrici caratteristiche del sistema (17). In particolare la matrice di rigidità $[K_{\text{tot}}]$ non dipende dalla posizione dei carichi e, quindi, può essere calcolata globalmente una volta soltanto.

Si capisce inoltre che, nel caso in cui si voglia ottenere un risultato migliore di quello conseguito, si può ipotizzare l'inserimento locale di nodi nella geometria CAD senza variare la forma della trave stessa[7].

Dato che le funzioni di miscelamento della B-Spline che definiscono la trasposizione duale hanno un carattere locale è possibile ottenere il risultato voluto calcolando nuovamente soltanto una parte della matrice $[K_{\text{tot}}]$ con un notevole risparmio di tempo.

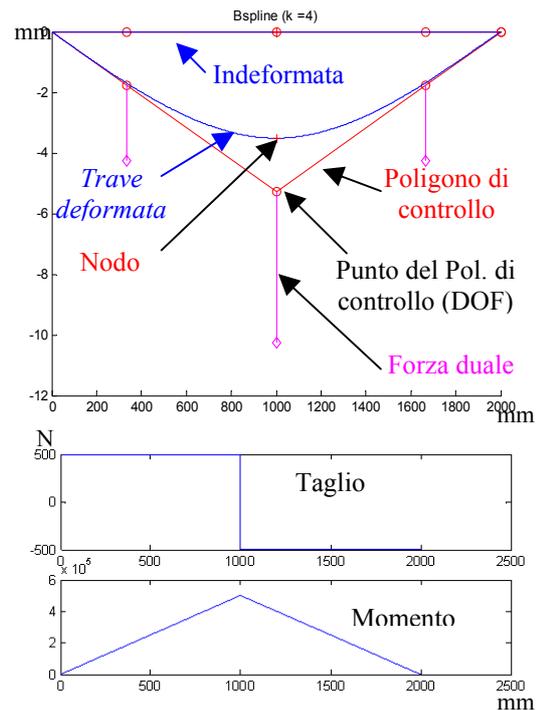


Fig. 3 Trave caricata in mezzeria con 5 punti di controllo

In figura 4 viene presentata la risoluzione approssimata della trave con doppio appoggio nel caso di 6 punti del poligono di controllo e nodi ad 1/3 e 2/3 della lunghezza della trave. La freccia massima calcolata è di $f = 3,46$ mm (errore = 1,7%) mentre l'errore sul momento flettente massimo è del 20% poiché per ogni intervallo parametrico la derivata seconda della freccia è una funzione di primo grado e quindi il diagramma del momento flettente può al massimo variare linearmente (il taglio risulterà essere costante in ogni intervallo).

Nel caso di trave curva il metodo risulta essere ugualmente stabile e si riescono ad avere degli ottimi risultati anche con pochi punti del poligono di controllo (DOF) a condizione che la descrizione geometrica della linea d'asse sia accurata e quindi sia possibile calcolare in modo pressoché esatto le derivate delle coordinate parametriche x e y (da cui si ricava, ad esempio, la curvatura della linea d'asse).

In figura 5 vengono riportate le configurazioni indeformata (a) e deformata (b) di un arco di cerchio di 90° (la sezione è uguale alla precedente) di raggio di curvatura teorico 2000mm incastrato ad una estremità ed una forza verso l'alto pari a 4000N.

In tabella 1 si riportano gli spostamenti dell'estremo libero della trave curva per diverse configurazioni rispetto al quelli ottenuti attraverso il codice FEM Ansys, si rileva che la convergenza può essere raggiunta con solo otto punti di controllo

Considerazioni analoghe possono essere eseguite nel caso, ad esempio, di momenti concentrati o vincoli interni su travi rettilinee o curve. In generale si nota che si può giungere velocemente ed automaticamente a risultati esatti concentrando nodi (oppure aumentandone la molteplicità) sui punti di applicazione delle forze tramite uno dei tanti algoritmi esistenti in letteratura preservando la forma dell'asse della trave. Nel caso in cui si voglia utilizzare soltanto la descrizione CAD fornita si trovano soluzioni approssimate dello stato di tensione-deformazione che possono essere successivamente raffinate nelle zone di maggior interesse

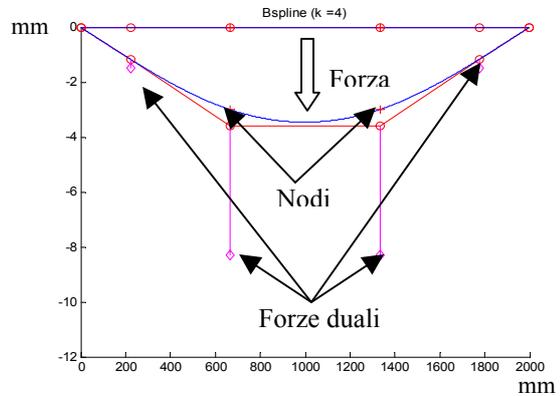


Fig. 4 Trave caricata in mezzeria con 6 punti di controllo

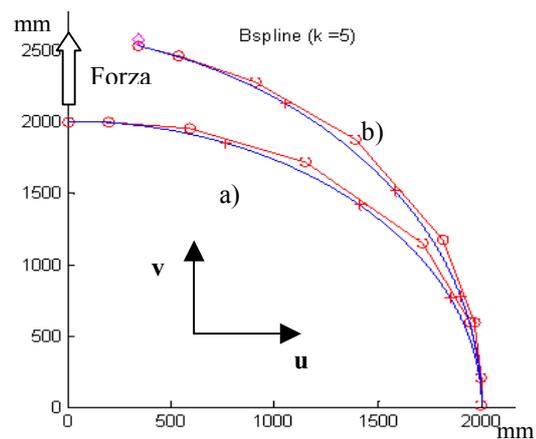


Fig. 5 Arco di cerchio di 90°

Tabella 1 - risultati ottenuti in funzione del numero dei punti del poligono di controllo

N. punti di controllo	5	6	7	8	Ansys (60 el.)
u (mm)	303.5	330.4	337.6	338.1	338.6
v (mm)	478.6	480.9	526.3	530.9	531.9

CONCLUSIONI

Nel presente articolo è stata presentata una nuova formulazione meshless attraverso la soluzione del problema di sollecitazione-deformazione di una trave curva ottenuta utilizzando le informazioni rese disponibili dalla descrizione CAD della linea d'asse della trave stessa.

Il metodo, essendo orientato verso una descrizione continua del dominio fisico, permette non solo di eliminare totalmente la mesh del sistema in oggetto ma di ottenere una soluzione approssimata anche nel caso in cui vi siano forze e momenti concentrati in un punto o porzione qualsiasi della trave. I DOF risultano essere i punti del poligono di controllo della B-Spline che descrive la linea d'asse e definiscono un dominio equivalente (dominio duale) che risulta essere in contatto solo nei punti iniziale e finale della struttura fisica. Sul dominio duale è quindi possibile "trasportare" le rigidezze e le forze fisiche senza le limitazioni tipiche dei metodi FEM.

Vista la natura locale delle funzioni di miscelamento delle B-Spline e gli algoritmi esistenti che permettono l'inserimento di nodi aggiuntivi senza variazione di forma, è stato possibile implementare degli algoritmi di sottomodellazione mirati ad una soluzione esatta del problema.

Il metodo è risultato essere convergente molto velocemente in tutti i test cases effettuati e richiede, come condizione per la corretta soluzione del problema posto, una descrizione B-Spline della linea d'asse con l'ascissa curvilinea della trave descritta in modo uniforme rispetto alla coordinata. E' già stata formulata una estensione del metodo al problema dei telai curvi ed alle vibrazioni libere di travi. La naturale estensione del metodo risulta ora essere il dominio del problema di tensione deformazione dei gusci e delle piastre e, quindi, l'estensione del metodo alle geometrie solide [8].

BIBLIOGRAFIA

- [1] Kunwoo Lee, "Principles of CAD/CAM/CAE Systems", Addison-Wesley;
- [2] T. Belytschko, et al., "Meshless methods: An overview and recent developments", Computer. Methods Applied Mechanical Engineering., Vol.139, 1996, 3-
- [3] V.Shapiro, I. Tsukanov, "Meshfree simulation of deforming domains", CAD, Vol.31,1999, 459-471;
- [4] Enzo Tonti,"A Direct discrete formulation of field laws: the Cell Method", Computer Modeling in Engineering & Sciences, vol.1, no.1, pp. 11-26,2001;
- [5] Riccardo Baldacci, "Scienza delle Costruzioni", Volume Secondo, UTET, ISBN 88-02-03837-6, 1983;
- [6] J.C. Léon, U. Gandiaga, D. Dupont, "Modeling flexible parts for virtual reality assembly simulations which interact with their environment", Proc. of Int. Conf. on Shape Modeling and applications, Genova (IT), 2001.
- [7] Farin G., "Curves and surfaces for CAD design" ,Fourth Ed., Academic Press ISBN 0-12-249054-1,1997;
- [8] G. Catania, "La progettazione, il calcolo e la fabbricazione simultanea di componenti meccanici: analisi e sviluppo di un sistema meccanico", 1991, Dottorato di ricerca in Progetto e costruzioni di macchine, Università degli Studi di Bologna;