

## INDICE

2. Sistema ad un grado di libertà (1 GDL).....	2
2.1 Risposta in regime sinusoidale.....	7
2.2 Trasmissibilità.....	11
3. SISTEMI A MOLTI GRADI DI LIBERTA' .....	13
3.1 Analisi Modale.....	14
3.1.2 Troncamento modale.....	21
4. MATRICI DI RIGIDEZZA .....	21
5. CENNI DEL METODO AGLI ELEMENTI FINITI (FEM).....	25
5.1 Matrice di rigidezza di elemento.....	26
5.1.1 Matrice di rigidezza della trave inflessa nel piano.....	28
5.2 Partizione della matrice di rigidezza di elemento .....	30
5.3 Matrice di struttura.....	31
5.3.1 Riferimento globale di struttura .....	33
5.4 Soluzione statica .....	35
5.5 Matrice di massa .....	36
5.6 Metodi di riduzione dei gradi di libertà .....	37
5.6.1 Riduzione di GUYAN.....	38
5.6.2 Riduzione di GRAIG-BAMPTON (CMS) .....	39
6.1 Moto del vincolo .....	41
6.2 Valutazione del sisma .....	43
7. STATI DEL SISTEMA .....	48

## 2. Sistema ad un grado di libertà (1 GDL)

Il più semplice sistema vibrante è rappresentato in figura mediante una massa, una molla ed uno smorzatore viscoso

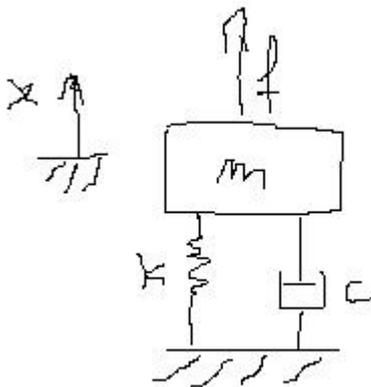


Figura 1 Sistema ad 1 DOF

Il grado di libertà del sistema è rappresentato dallo spostamento  $x(t)$  della massa determinato dalla forza  $f(t)$ .

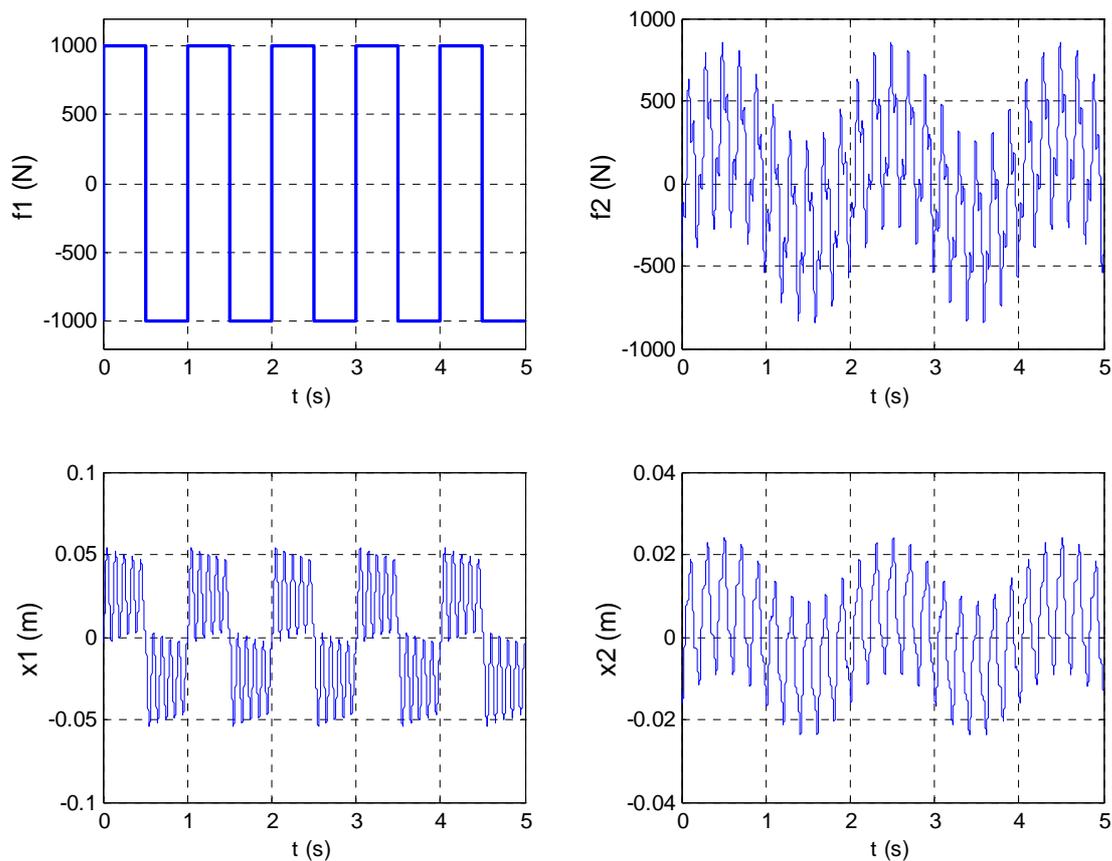
L'equazione di moto del sistema è rappresentata dalla equazione differenziale

$$1) \quad M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f$$

che, noto l'andamento temporale della forza  $f$  può essere integrata numericamente ed in questo caso spesso anche analiticamente, per trovare il valore di  $x(t)$ .

Siccome vogliamo parlare di sistemi meccanici 'veri' è bene anche soffermarci a riflettere su quale sia l'utilità della soluzione  $x(t)$  che troveremo: la  $x(t)$  in quanto tale non ci dice niente di interessante, mentre può essere molto importante ad esempio conoscere la forza che sollecita la molla  $F_m = Kx(t)$ . Infatti tale forza può servire a dimensionare la molla reale schematizzata dalla costante di rigidità  $K$ . Altrettanto importante può essere conoscere la forza totale trasmessa al vincolo  $F_v = Kx(t) + C\dot{x}(t)$  per dimensionare gli organi che determinano il vincolo del sistema (perni, supporti, ecc) oppure per far sì che il vincolo sia sollecitato il meno possibile, affinché il nostro sistema trasmetta al vincolo l'azione minore possibile. Queste considerazioni, qui abbastanza ovvie, devono farci riflettere sul fatto che, in generale, su sistemi più complessi, l'ottenimento della soluzione del sistema in termini di spostamento è solo il primo passo, al quale vanno poi affiancate ulteriori elaborazioni per ricavare le grandezze interessanti dal punto di vista del progettista.

Ritornando agli aspetti più analitici del problema in esame, riflettiamo sul fatto che la  $x(t)$  dipende ovviamente dalla  $f(t)$  e che due forze diverse danno soluzioni che apparentemente nulla hanno a che fare l'una con l'altra, mentre è evidente che le due soluzioni hanno in comune di essere determinate dallo stesso sistema vibrante. Questa circostanza non può essere messa in evidenza da una soluzione dell'equazione differenziale, come mostra chiaramente la figura seguente.



**Figura 2 Risposta  $x(t)$  di un sistema a due diverse forzanti**

Ci farebbe comodo quindi l'esistenza di una qualche funzione dipendente dalle sole caratteristiche del sistema, che potesse far da tramite tra il valore della forzante  $f(t)$  ed il valore della risposta  $x(t)$ , in modo da poter caratterizzare, con questa funzione, l'effetto che il sistema produce sulla forzante al fine di determinare il valore della risposta. Di tale funzione ci immaginiamo l'esistenza, ma non sappiamo come poter fare né a definirla, né tantomeno a trovarla.

A tal scopo ci viene in soccorso l'operatore matematico della trasformata di Laplace, secondo cui una qualunque funzione del tempo  $y(t)$  può essere trasformata, passando dal dominio del tempo al dominio della frequenza complessa  $s$ , mediante l'espressione

$$Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt$$

Questa è in generale una funzione complessa di variabile complessa che gode della proprietà rispetto alla trasformata della derivata che

$$\dot{Y}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \dot{y}(t) dt = sY(s) + y(0)$$

Applicando la trasformata di Laplace alla equazione 1), sia alla  $x(t)$  che alla  $f(t)$  otteniamo, dopo qualche passaggio

$$2) \quad X(s) = H(s) [F(s) + M(x(0)s + \dot{x}(0) + 2\xi\omega_o x(0))]$$

Avendo definito le grandezze

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$3) \quad 2\xi\omega_o = \frac{C}{M} \rightarrow \xi = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$$

e, soprattutto

$$4) \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \quad \text{funzione di trasferimento}$$

Il dominio delle frequenze complesse  $s$  per il momento non ci dice niente di interessante, in quanto non sappiamo attribuirgli un significato fisico. In ogni caso, prescindendo ora da questo problema, se usiamo tale dominio la 2) ci dice che la risposta  $X(s)$  è legata sia alla forzante  $F(s)$  che alle condizioni iniziali del moto  $x(0)$  e  $x'(0)$  tramite la funzione  $H(s)$ , che abbiamo denominato funzione di trasferimento. Tale funzione contiene solo grandezze del sistema vibrante ( $M, C, K$ ) dunque dipende solo dalle caratteristiche del sistema vibrante e quindi sembra svolgere bene il compito che avevamo immaginato poco fa, ovvero di legare la risposta all'eccitazione per tramite delle caratteristiche del sistema.

Riflettiamo ancora sulla 2). Nel caso che le condizioni iniziali siano nulle e che la trasformata della  $f(t)$  sia  $F(s)=1$ , abbiamo che  $X(s)=H(s)$ , ovvero la trasformata della risposta è uguale alla funzione di trasferimento. Condizioni iniziali nulle è una circostanza comune: significa che iniziamo a forzare il sistema quando esso è in quiete.  $F(s)=1$  significa che la  $f(t)$  è la funzione di Dirac  $\delta(t)$ , ovvero l'impulso di durata infinitesima ed ampiezza infinita. Quindi se il sistema, dalla quiete, venisse eccitato mediante un impulso, risponderebbe con una  $x(t)$  che è la antitrasformata di  $H(s)$ .

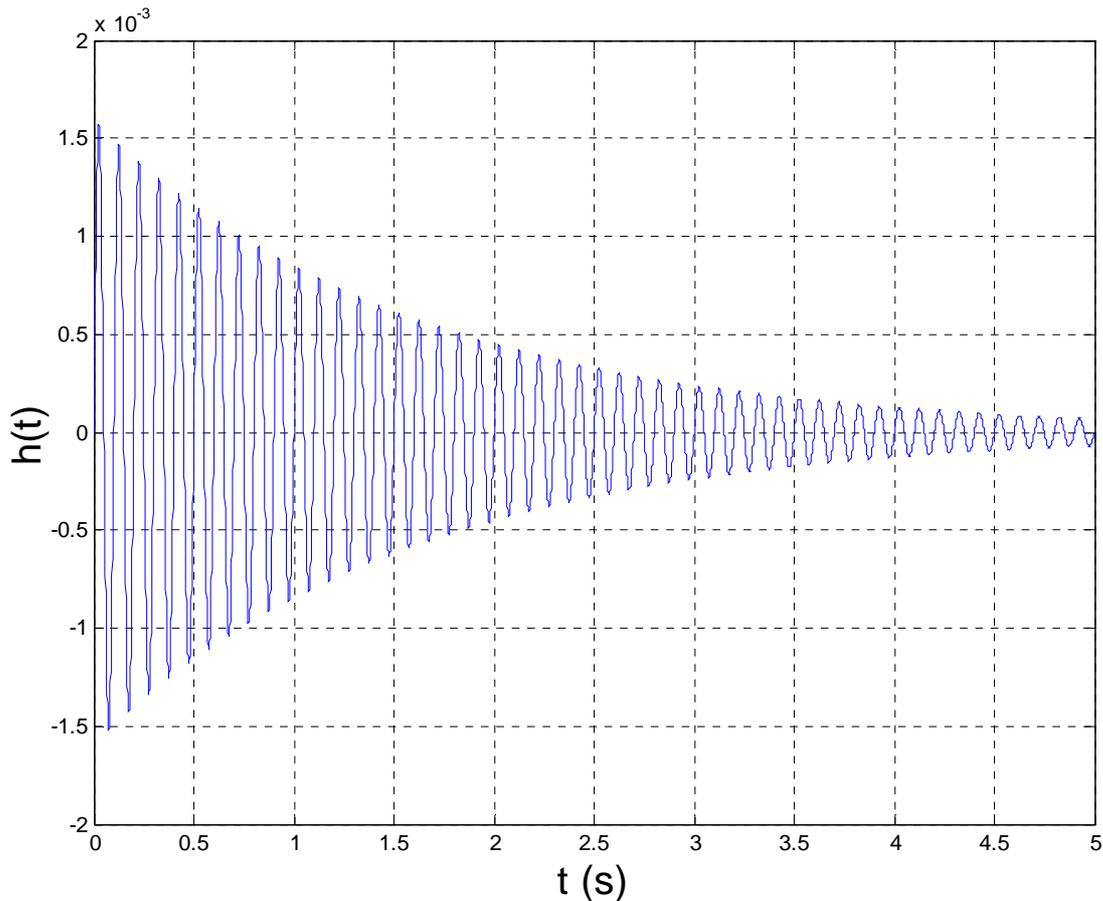
$$5) \quad h(t) = x(t) = L^{-1}(H(s)) = \frac{1}{M\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) \quad \text{risposta all'impulso}$$

dove

$$\omega_d = \omega_o \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\sigma = \xi\omega_o$$

L'andamento della risposta all'impulso è rappresentato in figura



**Figura 3 Risposta all'impulso**

La  $h(t)$  è una sinusoide di pulsazione  $\omega_d$  la cui ampiezza diminuisce come la funzione  $e^{-\sigma t}$ . La quantità  $\sigma$  è detta velocità di decadimento esponenziale e la quantità  $\omega_d$  è detta pulsazione propria smorzata del sistema. E' ovvio che la velocità di decadimento è nulla se il sistema non è smorzato ed in tal caso la pulsazione propria coincide con  $\omega_0$  che è detta pulsazione propria non smorzata del sistema. La quantità  $\xi$  è detta fattore di smorzamento. Di norma il suo valore è piccolo (si usa esprimerla in percentuale e vale intorno al 5% per i normali sistemi costituiti da materiali metallici). Più propriamente dovrebbe chiamarsi frazione di smorzamento critico e deve essere compresa tra 0 ed 1, perché il sistema abbia una risposta all'impulso quale quella in figura. Se è maggiore di 1 la  $\omega_d$  diviene immaginaria e la risposta all'impulso non ha più la forma di sinusoide, ma quella di una esponenziale decrescente. In tal caso il sistema non ha più la capacità di oscillare a seguito di un impulso, ma esibisce una risposta decrescente con asintoto nullo. E' per questo che si definisce smorzamento critico quello per cui  $\xi=1$ , che discrimina il comportamento oscillante da quello esponenziale.

Ritornando ad analizzare la 2), supponiamo che la forza applicata al sistema sia nulla  $F(s)=0$ , ma che all'istante iniziale il sistema abbia uno spostamento iniziale  $x(0)$  o una velocità iniziale  $x'(0)$  od entrambe. Ovvero perturbiamo lo stato iniziale del sistema e vediamo come questo si muove in conseguenza. Dalla 2) si vede che la  $X(s)$  sarebbe una funzione proporzionale ad  $H(s)$  e ad  $sH(s)$ . Cio' significa che la  $x(t)$  sarebbe la somma di una funzione come la  $h(t)$  e di una come la derivata di  $h(t)$ . Ovvero sarebbe ancora una funzione dall'andamento analogo alla  $h(t)$ . In conclusione il sistema perturbato si muove con un transitorio oscillante che dopo un breve tempo si esaurisce. Dunque se la forzante  $f(t)$  è persistente, ovvero se è applicata per un tempo abbastanza lungo, i termini della 2) dipendenti dalle condizioni iniziali, se ci sono, dopo un breve lasso di tempo diventano trascurabili e quindi la 2) si riduce a

$$2') \quad X(s) = H(s)F(s)$$

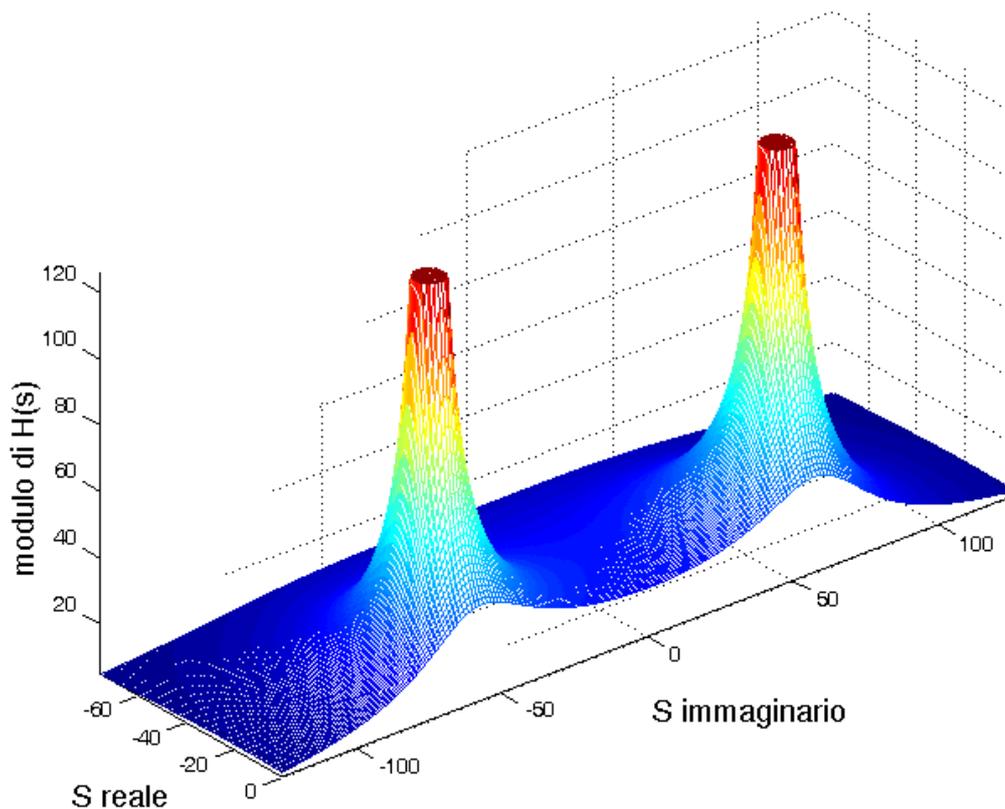
Cioè la trasformata di Laplace della risposta è proporzionale alla trasformata di Laplace della forza tramite la funzione di trasferimento  $H(s)$ . La 2') è una relazione fondamentale, una volta che se ne è compreso bene il significato prima spiegato.

Per la proprietà della convoluzione della trasformata di Laplace abbiamo

$$2'') \quad x(t) = \int_0^t h(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

Ovvero la risposta di un sistema è data dall'integrale di convoluzione della risposta all'impulso con la funzione della forzante, sempre che, beninteso, siano nulle le condizioni iniziali di spostamento e velocità.

La funzione di trasferimento è funzione complessa di variabile complessa. Vediamo l'andamento del suo modulo



**Figura 4 Modulo della funzione di trasferimento**

Come si vede il modulo diventa infinito per valori di  $s$  pari a

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

Tali valori sono i poli della funzione di trasferimento e sono valori complessi coniugati. Dalla definizione 4) di funzione di trasferimento vediamo che i poli sono i valori di  $s$  che annullano il

denominatore di  $H(s)$ . I poli contengono tutte le caratteristiche del sistema, ovvero la velocità di decadimento esponenziale e la pulsazione naturale smorzata.

## 2.1 Risposta in regime sinusoidale

Dato che ogni funzione del tempo può essere approssimata da una serie di Fourier, ovvero

$$y(t) \approx \sum_{i=0}^n [A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)]$$

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T} n$$

ove  $T$  è il periodo della funzione, è evidente che, applicando la serie di Fourier alla funzione che rappresenta la forza imposta al sistema, questa può essere considerata la somma di termini sinusoidali ciascuno ad una frequenza nota.

Ha quindi grande interesse studiare la risposta del nostro sistema, qualora la forzante sia di tipo sinusoidale.

Se dunque

$$f(t) = F_o \sin(\omega t)$$

$$F(s) = F_o \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

La 2') ci dice che  $X(s)$  è una funzione di  $s$  prodotto di due polinomi a denominatore con 4 poli complessi coniugati

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$p_{3,4} = \pm j\omega$$

Bisogna scomodare un po' di strumenti matematici e per la precisione il teorema dei residui il quale ci consente di esprimere  $X(s)$  come

$$X(s) = F_o \sum_{i=1}^4 \frac{R_i}{s - p_i}$$

Dove  $R_i$  è il residuo di  $X(s)$  nel polo  $p_i$ , del quale tralasciamo la definizione che può essere reperita nei testi specifici. Ci basti pensare che  $R_i$  è un coefficiente noto.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s - p}\right) = e^{pt}$$

Dunque la  $x(t)$  è la combinazione lineare di funzioni del tipo

$$e^{(-\sigma \pm j\omega_d)t}$$

$$e^{\pm j\omega t}$$

Con i coefficienti della combinazione dati dai residui. Tali funzioni possono essere ricondotte a sinusoidi smorzate di pulsazione  $\omega_d$  e a sinusoidi di pulsazione  $\omega$ .

In definitiva la  $x(t)$  è una funzione sinusoidale smorzata analoga alla risposta all'impulso che dopo un po' diventa trascurabile ed una sinusoidale di pulsazione  $\omega$  che persiste per quanto persiste la sinusoidale della forzante. I residui corrispondenti ai poli  $p_{3,4}$  sono dati dalla funzione di trasferimento

valutata in  $s=j\omega$  e tali residui determinano l'ampiezza della risposta persistente di pulsazione pari a quella della forzante.

Dunque, la risposta in regime sinusoidale di un sistema è data da uno spostamento della stessa pulsazione della forzante di ampiezza e fase definiti dalla  $H(s=j\omega)$ , ovvero dalla  $H(s)$  valutata per  $s$  immaginario.

$$2''''') \quad H(s = j\omega) = H(\omega) = \frac{1/M}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\sigma\omega}$$

La  $H(\omega)$  è chiamata risposta in frequenza del sistema.

La  $H(\omega)$  è funzione complessa di variabile reale  $\omega$ . Può essere vista come parte reale  $H_r(\omega)$  e parte immaginaria  $H_i(\omega)$ , oppure come ampiezza  $|H(\omega)|$  e fase  $\varphi(\omega) = \arctg(H_i(\omega)/H_r(\omega))$ .

Una forzante  $f(t) = F_0 \sin(\omega t)$  dà luogo a regime (dopo che si è esaurito il transitorio dato da dall'esponenziale decrescente di pulsazione  $\omega_d$ ) alla risposta

$$x(t) = F_0 [H_r(\omega) \sin(\omega t) + H_i(\omega) \cos(\omega t)]$$

oppure

$$x(t) = F_0 |H(\omega)| \sin(\omega t + \theta(\omega))$$

La figura seguente mostra il grafico della risposta in frequenza con ascisse la frequenza  $f = 2\pi/\omega$  che ha un significato più immediato della pulsazione.

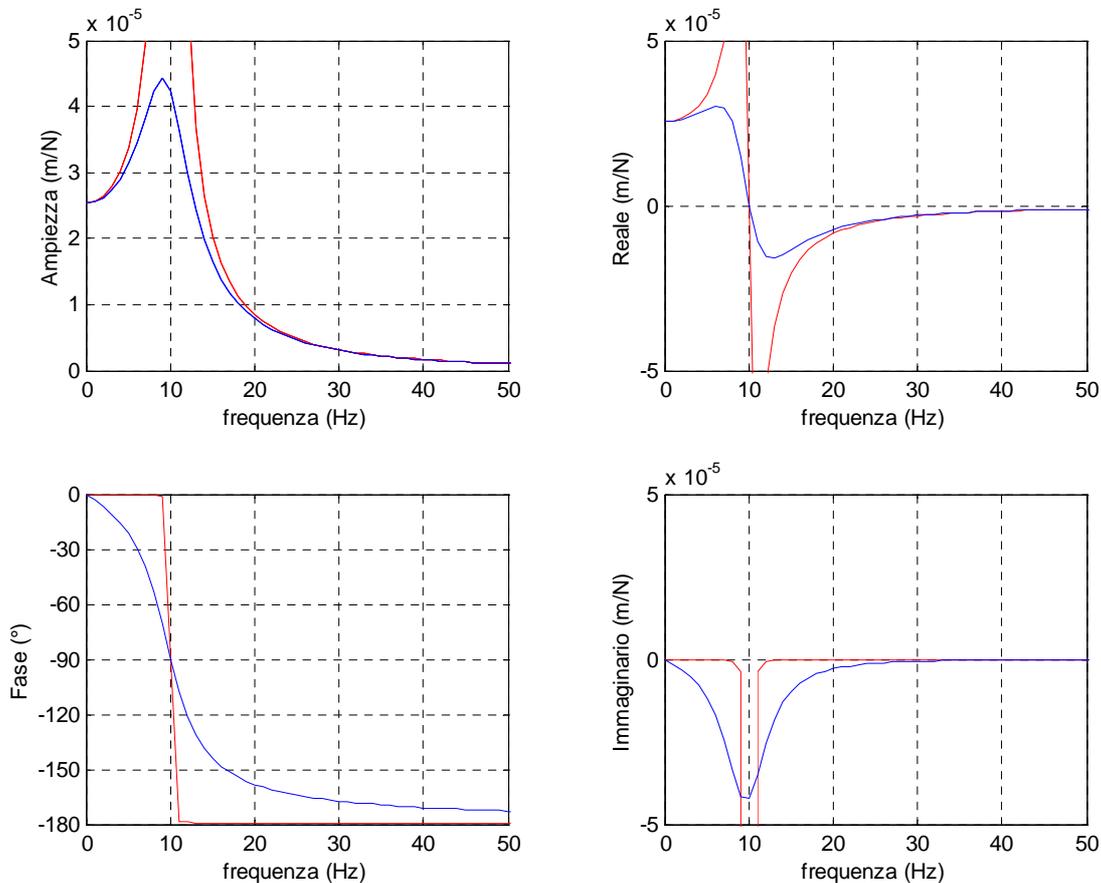


Figura 5 Risposta in Frequenza  $H(f)$

La curva rossa è per smorzamento nullo, quella blu per  $\xi=0.3$ .

A frequenza nulla l'ampiezza vale  $1/K$ , il reciproco della rigidità del sistema. A frequenza infinita l'ampiezza tende a 0. Ovvero a frequenza nulla abbiamo il caso statico  $f=Kx$ , a frequenza grande si tende al caso di sistema senza molla e smorzatore  $f=Ma$ , ovvero predomina la forza di inerzia massa per accelerazione e spostamento inversamente proporzionale al quadrato della frequenza. Questo è il comportamento di una massa libera soggetta alla forza  $f$ . Vicino alla risonanza (frequenza propria del sistema  $\omega_0$ ), l'ampiezza diventa grande (se lo smorzamento è nullo è infinita). Qui la forza elastica e la forza d'inerzia si fanno equilibrio scambiandosi l'energia del sistema che ha bisogno di una piccola forza solo per compensare solo la forza di attrito viscoso. Per smorzamento nullo i poli di  $H(s)$  stanno sull'asse immaginario e la figura 4 mostra che in tal caso i valori infiniti di  $H(s)$  starebbero proprio sull'asse immaginario, dove viene valutata  $H(\omega)$ .

Il valore massimo del modulo di  $H(\omega)$  si ha per

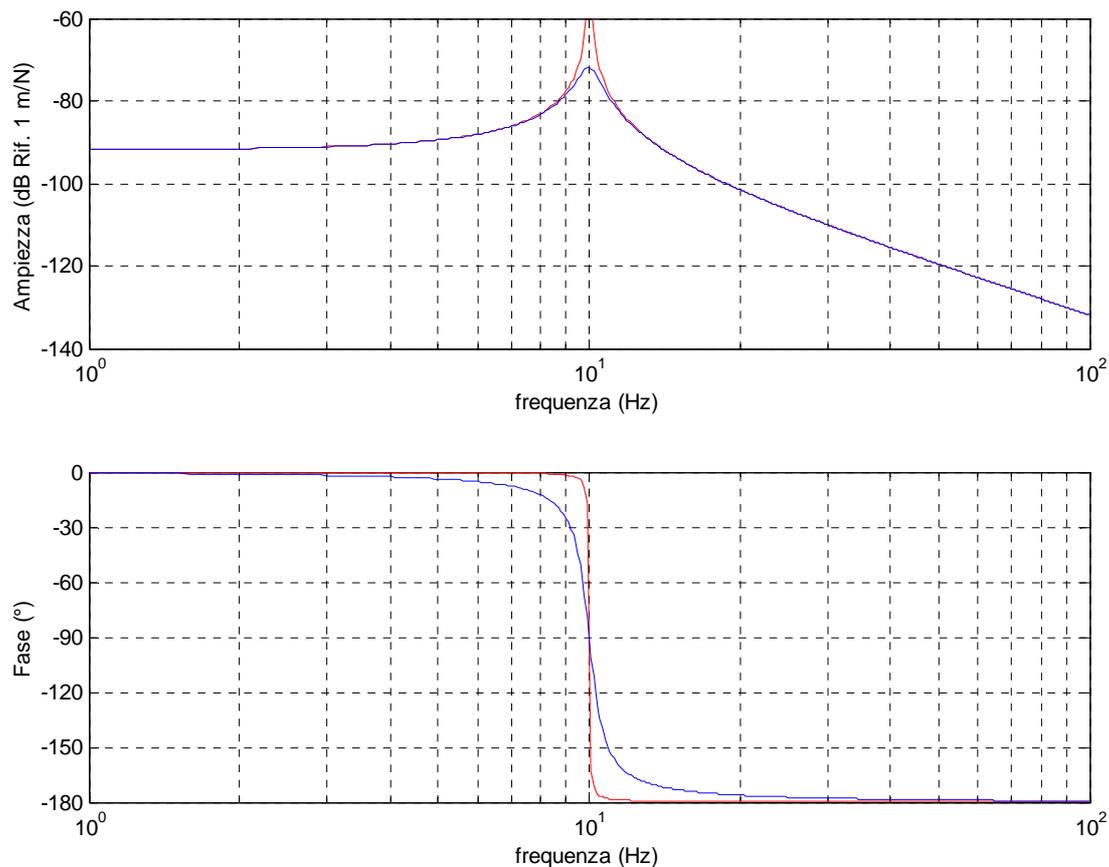
$$\max(|H(\omega)|) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}K} \cong \frac{1}{2\xi K}$$

per

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1-2\xi^2}$$

Per evidenziare meglio l'andamento della risposta in frequenza, visti gli elevati valori in risonanza, è spesso usata una scala logaritmica per l'ampiezza. Talvolta la scala logaritmica è usata anche per la frequenza. La scala logaritmica più comune è il decibel (dB) definito come  $20\log_{10}(|H|)$ .

La figura seguente mostra il grafico di  $H(f)$  in questa forma che viene di solito denominata diagramma di Bode del sistema.



**Figura 6 Risposta in Frequenza H(f) -diagramma di Bode**

Si nota come i valori di ampiezza sono molto più leggibili e come prima della risonanza il grafico è quasi una retta orizzontale, mentre per alte frequenze è quasi una retta inclinata che diminuisce di circa 12 dB per ottava ovvero diminuisce di 12 dB per ogni raddoppio della frequenza.

La risposta in frequenza assume una utilità pratica indiscutibile, in quanto consente subito di vedere come una forza sinusoidale di data frequenza viene amplificata dall'ampiezza per dare lo spostamento e come lo spostamento è sfasato rispetto alla forza.

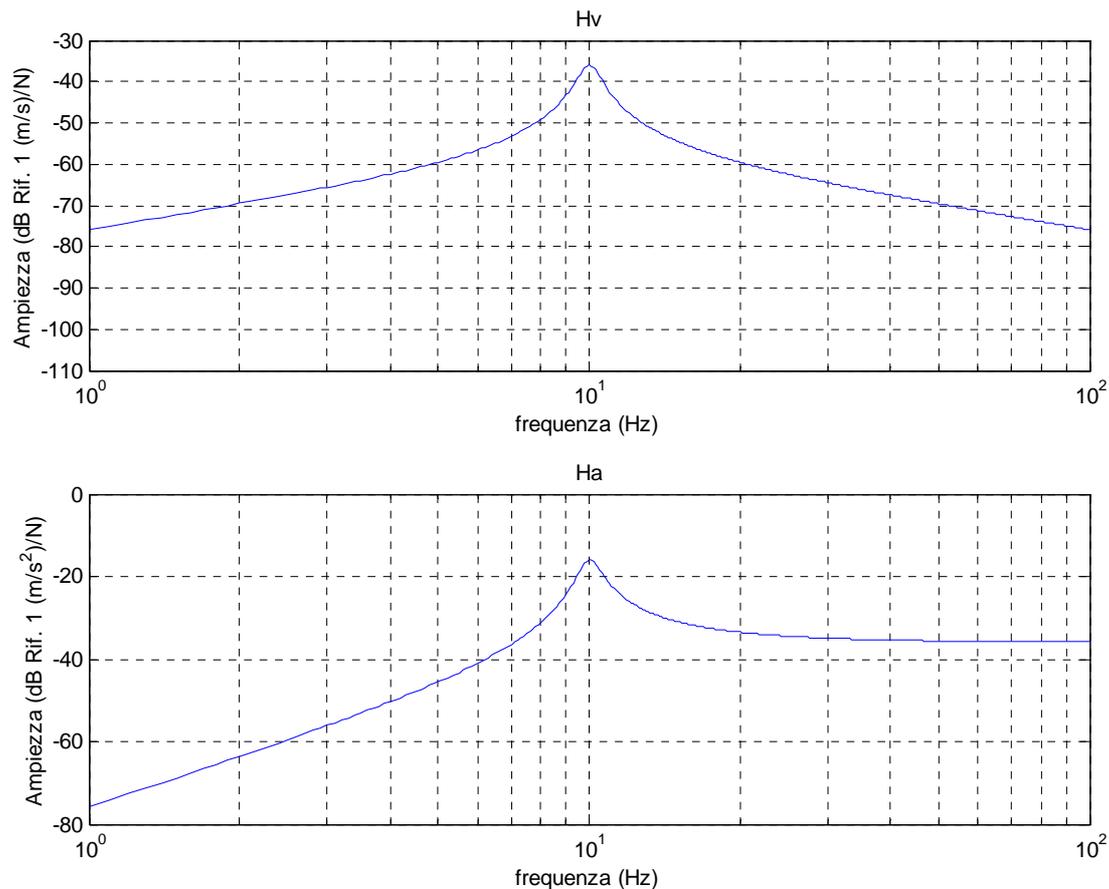
Se volessimo avere la relazione tra le trasformate della velocità e della accelerazione e la forza basta ricordare le proprietà della trasformata di Laplace e quindi

$$\frac{X(s)}{F(s)} = H(s) \rightarrow \text{funz.trasf.in...spostamento}$$

$$6) \quad \frac{\dot{X}(s)}{F(s)} = sH(s) = H_v(s) \rightarrow \text{funz.trasf.invelocità}$$

$$\frac{\ddot{X}(s)}{F(s)} = s^2H(s) = H_a(s) \rightarrow \text{funz.trasf.inaccelerazione}$$

Analogamente per la risposta in frequenza sostituendo  $s=j\omega$ .  
La figura mostra le ampiezze di  $H_v(f)$  e  $H_a(f)$ .

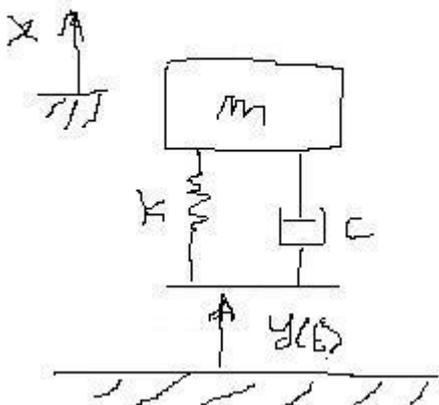


**Figura 7 Risposte in Frequenza (Ampiezze) di velocità e accelerazione**

Per la risposta in frequenza di velocità prima e dopo la risonanza la pendenza è quella di una retta inclinata di circa 6 dB per ottava, mentre per la risposta in accelerazione prima della risonanza abbiamo una pendenza positiva di 12 dB per ottava e dopo la risonanza la risposta tende ad essere una retta orizzontale con valore di ampiezza  $1/M$ .

A questo punto il sistema ad un grado di libertà non ha più segreti, nel senso che ne abbiamo completamente individuato il comportamento e sappiamo bene metterne in evidenza le proprietà che sono sostanzialmente riassunte nella funzione di trasferimento e nei suoi poli.

## 2.2 Trasmissibilità



Il sistema di figura 1 questa volta non ha più una forza applicata, ma subisce lo spostamento  $y(t)$  del vincolo.  $x(t)$  è ancora lo spostamento assoluto della massa. L'equazione del moto diviene

$$M\ddot{x} + C(\dot{x} - \dot{y}) + K(x - y) = 0$$

E prendendo le trasformate di Laplace, supponendo condizioni iniziali nulle abbiamo

**Figura 8 Sistema ad 1GDL: Spostamento del vincolo**

$$(s^2 + 2\sigma s + \omega_o^2)X(s) = (2\sigma s + \omega_o^2)Y(s)$$

$$7) \quad \frac{X(s)}{Y(s)} = T(s) = MH(s)(2\sigma s + \omega_o^2)$$

La  $T(s)$  è detta trasmissibilità ed è la funzione di trasferimento tra la trasformata dello spostamento assoluto  $x(t)$  e quella dello spostamento del vincolo  $y(t)$ .

Per  $s=j\omega$  avremo la risposta in frequenza ovvero il legame di fase ed ampiezza tra spostamento sinusoidale a regime del vincolo e spostamento della massa.

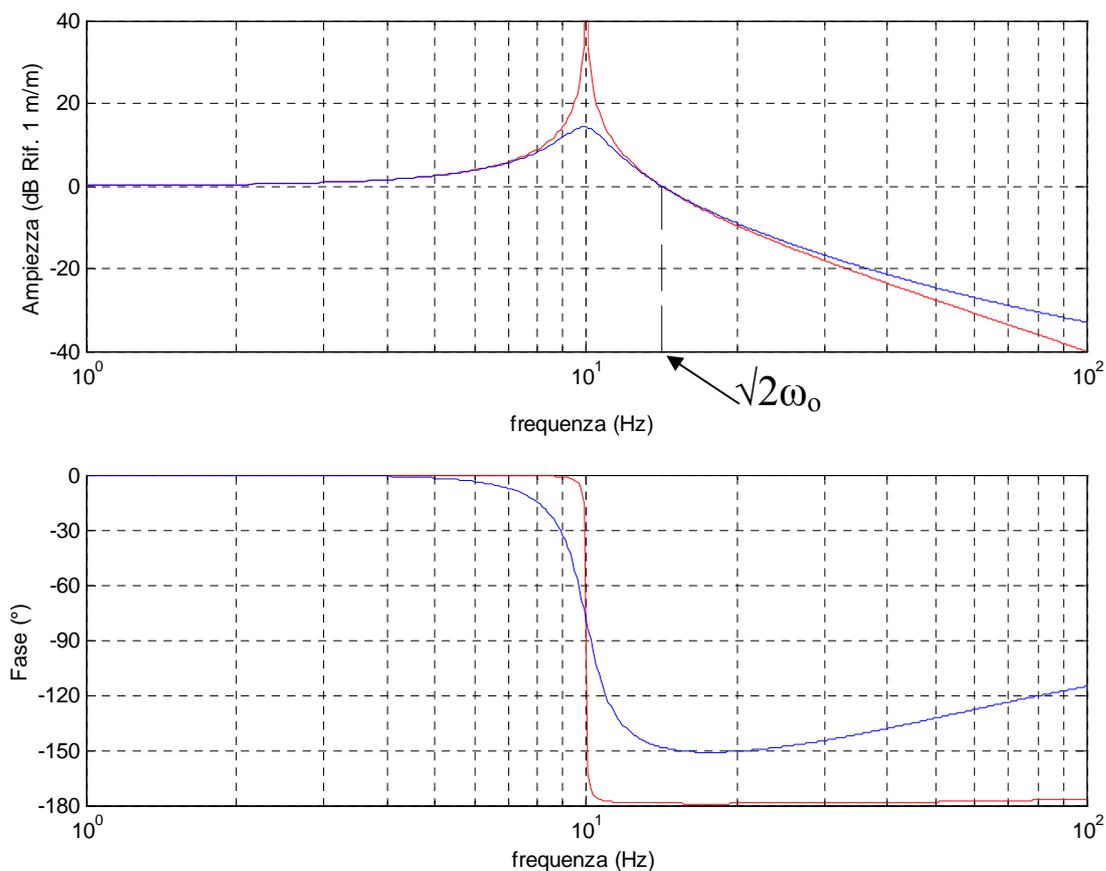
Qualora, per il sistema di figura 1 volessimo il rapporto tra la trasformata della forza trasmessa al vincolo e quella della forza  $f(t)$  avremmo

$$F_{trasmessa}(s) = KX(s) + C\dot{X}(s)$$

$$\frac{F_{trasmessa}(s)}{F(s)} = T(s)$$

Ovvero anche questo rapporto è espresso dalla stessa funzione di trasferimento  $T(s)$ .

La trasmissibilità per  $s=j\omega$  è la risposta in frequenza di trasmissibilità ed ha l'andamento mostrato in figura



**Figura 9** Trasmissibilità

Al solito la curva rossa si riferisce ad uno smorzamento nullo, mentre quella blu a  $\xi \neq 0$ . Si nota che per  $\omega = \sqrt{2}\omega_0$  la trasmissibilità vale sempre 1 qualunque sia lo smorzamento.

Per frequenza nulla (caso statico) la trasmissibilità vale 1 ovvero la massa  $M$  si sposta rigidamente con il vincolo, mentre ad alta frequenza la massa tende a restare ferma, tanto più quanto minore è lo smorzamento.

Se la massa  $M$  rappresenta il passeggero su un veicolo dotato di sospensioni di rigidità  $K$  e smorzamento  $C$ , è chiaro che la frequenza delle asperità stradali deve essere per quanto possibile più grande della frequenza propria del sistema e lo smorzamento deve essere il più piccolo possibile. In tal modo il passeggero si muoverà poco e la sospensione è confortevole.

### 3. SISTEMI A MOLTI GRADI DI LIBERTA'

La figura seguente mostra a titolo esemplificativo un sistema a 2 gradi di libertà rappresentati dallo spostamento delle due masse, soggette a due forze variabili nel tempo.

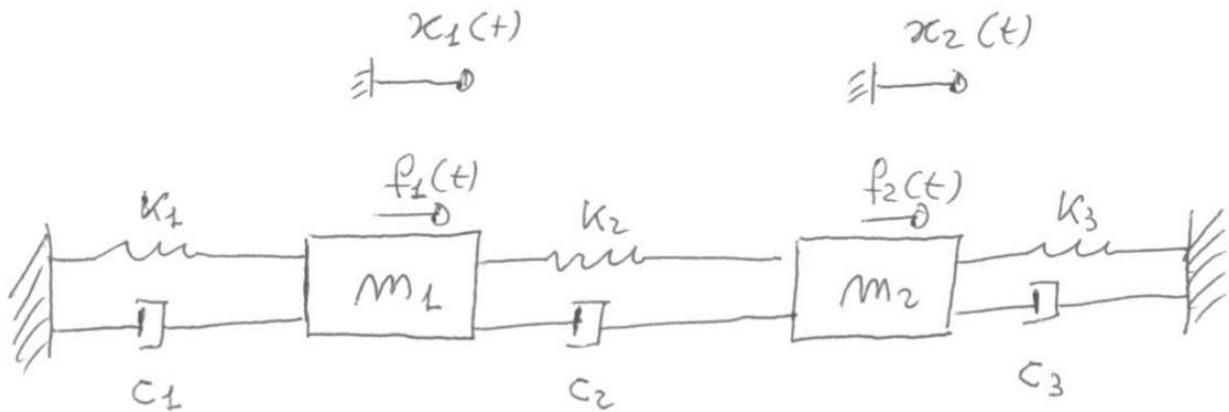


Figura 10 Sistema a 2 gradi di libertà

Le equazioni di moto del sistema possono essere scritte facilmente e danno un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine così fatto

$$a) \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = f_2 \end{cases}$$

Confrontata con l'equazione 1) del sistema ad 1 grado di libertà notiamo subito l'ulteriore complicazione che in ogni equazione compaiono le incognite  $x_1$  e  $x_2$  e quindi le due equazioni vanno risolte simultaneamente.

Definendo le matrici di massa, smorzamento e rigidità

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; [c] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) \end{bmatrix}; [k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix}$$

Ed i vettori dei gradi di libertà e delle forze applicate

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}; \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Possiamo scrivere simbolicamente il sistema a) come

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}$$

Al di là di saper scrivere le matrici di massa, smorzamento e rigidità, è chiaro che tale operazione può essere fatta per un sistema ad  $n$  gradi di libertà che darà luogo in generale al sistema di equazioni differenziali

$$8) \quad \begin{matrix} (n,n)(n,1) & (n,n)(n,1) & (n,n)(n,1) & (n,1) \\ [m] \{ \ddot{x} \} + [c] \{ \dot{x} \} + [k] \{ x \} = \{ f \} \end{matrix}$$

Sopra, tra parentesi tonde, sono indicate anche le dimensioni delle matrici e dei vettori.

Le matrici, in generale, sono matrici simmetriche con molteplici termini non nulli il che sta ad indicare che su ciascuna equazione del sistema compaiono simultaneamente più incognite (in teoria tutte le incognite). Il sistema è quindi un sistema di equazioni fortemente accoppiate, che devono essere risolte simultaneamente.

Dalla conoscenza delle funzioni del tempo delle forze applicate potremmo, con un metodo di integrazione numerico, risolvere le equazioni trovando il vettore degli spostamenti dei gradi di libertà che costituisce nell'insieme la risposta del sistema alle eccitazioni. E' chiaro che, se in figura 2) avevamo difficoltà ad interpretare i risultati per un sistema ad 1 grado di libertà, adesso questa difficoltà sarebbe ovviamente molto maggiore: non potremmo pensare, dall'esame del vettore degli spostamenti, di dedurre alcunché sulle proprietà del sistema.

Possiamo anche questa volta migrare nel dominio di Laplace ottenendo

$$8') \quad \left[ [m]s^2 + [c]s + [k] \right] \{ X(s) \} = [B(s)] \{ X(s) \} = \{ F(s) \}$$

ovvero

$$9) \quad \{ X(s) \} = [B(s)]^{-1} \{ F(s) \} = [H(s)] \{ F(s) \}$$

Questa equazione ci dice che il vettore degli spostamenti dei gradi di libertà trasformati nel dominio di Laplace può essere ricavato direttamente dallo stesso vettore delle forze a mezzo della matrice di funzioni di Laplace inversa  $[B(s)]$ .

La matrice  $[H(s)] = [B(s)]^{-1}$  contiene evidentemente le proprietà del sistema, dipendendo dalle sue caratteristiche di massa, smorzamento e rigidità, in maniera analoga a quanto detto per la funzione di trasferimento  $H(s)$  per il sistema ad 1 grado di libertà, ed in effetti questa può essere chiamata matrice delle funzioni di trasferimento del sistema. Ogni suo termine contiene una funzione di trasferimento che moltiplicata per la forza corrispondente dà l'aliquota di spostamento dipendente da quella forza.

Purtroppo ricavare direttamente la  $[H(s)]$  dalla  $[B(s)]$  è impresa perlopiù disperata e quindi la 9) non può essere utilizzata in termini pratici.

### 3.1 Analisi Modale

Se il sistema 8) e 8') potesse avere equazioni in cui in ognuna compare una sola incognita, evidentemente il problema sarebbe molto semplificato, perché ogni equazione sarebbe equivalente a quella di un sistema ad 1 grado di libertà. Tale sistema sarebbe come suol dirsi disaccoppiato, ovvero ogni spostamento dipenderebbe da una sola forza. E' chiaro che nessun sistema fisico è disaccoppiato, ma esistono delle trasformazioni lineari che possono variare le matrici rendendole diagonali e quindi potremmo pensare che esista una trasformazione lineare tale da rendere il nostro sistema disaccoppiato.

In effetti questa circostanza ci dà una speranza. Procediamo supponendo che la matrice di smorzamento  $[c]$  sia nulla ed adottiamo una trasformazione lineare per il momento incognita, tale che

$$10) \quad \begin{matrix} (n,1) & (n,n) & (n,1) \\ \{x\} = [\phi] \{q\} \end{matrix}$$

Con tale trasformazione si trovano gli spostamenti fisici dei gradi di libertà a partire da spostamenti  $q$  fittizi attraverso una matrice di trasformazione  $[\Phi]$ . Tale trasformazione vale ovviamente anche per le velocità, le accelerazioni, sia nel dominio del tempo che il quello di Laplace.

Adottando la trasformazione al sistema 8) senza la matrice di smorzamento si ottiene

$$[\phi]^{-1} [m] [\phi] \{\ddot{q}\} + [\phi]^{-1} [k] [\phi] \{q\} = [\phi]^{-1} \{f\} = \{t\}$$

Il sistema sarebbe lo stesso: note le forze  $f$  sono note le forze fittizie  $t$  e risolvendo il sistema si otterrebbero gli spostamenti fittizi  $q$  da cui troveremmo gli spostamenti fisici  $x$  a mezzo della trasformazione lineare. Questo sistema con spostamenti fittizi e forze fittizie ha matrice di massa fittizia e di rigidità fittizia date da

$$[mf] = [\phi]^{-1} [m] [\phi]$$

$$[kf] = [\phi]^{-1} [k] [\phi]$$

Se tali matrici fossero entrambe diagonali, avremmo raggiunto lo scopo.

L'algebra delle matrici ci dice che è possibile diagonalizzare queste matrici risolvendo il problema

$$b) \quad [k] [\phi] = [m] [\phi] [D]$$

Ovvero date le matrici  $[m]$  e  $[k]$  si tratta di trovare una matrice  $[\Phi]$  di trasformazione lineare ed una matrice diagonale  $[D]$  che soddisfa la precedente relazione.

Tale problema è noto come problema agli autovalori (contenuti nella matrice  $[D]$ ) ed autovettori (ciascuna colonna della matrice  $[\Phi]$ ) delle matrici  $[m]$  e  $[k]$ .

Per le proprietà di simmetria della matrici di massa e rigidità, tale problema ha soluzione: esistono  $n$  autovalori ed  $n$  autovettori ciascuno dei quali definito a meno di una costante moltiplicativa, che soddisfano la precedente condizione. In tal caso

$$[\phi]^{-1} [k] [\phi] = [k_d]$$

$$[\phi]^{-1} [m] [\phi] = [m_d]$$

Dove  $[k_d]$  ed  $[m_d]$  sono matrici diagonali.

Per trovare  $[\Phi]$  e  $[D]$  note  $[m]$  e  $[k]$  esistono algoritmi di estrazione degli autovalori ed autovettori specifici e robusti, quindi non è un problema. La diagonalizzabilità del sistema 8) nel caso di smorzamento nullo è stata quindi risolta per mezzo dell'algebra delle matrici in modo rigoroso. Sfugge tuttavia un aggancio fisico per spiegare il significato della operazione di diagonalizzazione. A questo proposito scriviamo il sistema 8') senza matrice di smorzamento e con forze esterne nulle

$$[[m]s^2 + [k]]\{X(s)\} = \{0\}$$

Questo corrisponde a trovare il vettore degli spostamenti trasformati per il sistema omogeneo, che ha soluzione solo per i valori del parametro  $s^2$  che annullano il determinante della matrice dei coefficienti. Confrontiamo l'espressione precedente, riscritta portando un membro a destra dell'uguale con la b) che è l'espressione con la quale si stabilisce il problema agli autovalori ed autovettori

$$[k]\{X(s)\} = [m](-s^2) \Leftrightarrow [k][\phi] = [m][\phi][D]$$

È chiaro che queste espressioni sono formalmente analoghe. Al vettore  $\{X\}$  corrisponde una colonna della matrice  $[\Phi]$ , a ciascun  $-s^2$  corrisponde un termine della matrice diagonale  $[D]$ . Quindi il sistema omogeneo ha soluzione non banale per  $n$  valori di  $(-s^2)$  ognuno dei quali è un autovalore contenuto nella diagonale di  $[D]$  e per ogni autovalore il vettore  $\{X\}$ , definito a meno di una costante, è la colonna corrispondente della matrice  $[\Phi]$ .

Agli autovalori si dà il nome di quadrato della pulsazione propria non smorzata del sistema (ricordiamo dal sistema ad 1 grado di libertà che con smorzamento nullo i poli del sistema sono  $\pm j\omega_0$  e quindi quando  $s = \pm j\omega_0$   $(-s^2) = \omega_0^2$ ). Un sistema ad 1 grado di libertà ha una sola pulsazione propria  $\omega_0$ , un sistema ad  $n$  gradi di libertà ne ha  $n$  ed il quadrato di ognuna è un autovalore. In corrispondenza di ciascuna autovalore troviamo un autovettore che rappresenta l'ampiezza della deformata del sistema quando questo vibra alla frequenza corrispondente alla pulsazione propria

$$\{x(t)\} = \{\varphi\}_r \sin(\omega_{or}t)$$

L'ampiezza di  $\{\varphi\}$  che è l'autovettore è definita a meno di una costante arbitraria.

Abbiamo quindi ricondotto ad un significato fisico gli autovalori ed autovettori.

Dato che questi sono definiti a meno di una costante scegliamo per convenzione le costanti in modo che la matrice di massa diagonale fittizia diventi la matrice identità  $n, n$ . Quindi

$$\begin{aligned} & [\phi]^{-1} [m] [\phi] = [m_d] = [I] \\ 11) & [\phi]^{-1} [k] [\phi] = [k_d] = [D] = \begin{bmatrix} \cdot & & \\ & \omega_o^2 & \\ & & \cdot \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice diagonale  $[D]$  degli autovalori è stata chiamata  $[\omega_o^2]$  per ricondurla al suo significato fisico.

Le matrici di trasformazione di coordinate  $[\Phi]$  hanno la ulteriore proprietà che la loro trasposta è uguale all'inversa e quindi potremmo sostituire le inverse con le traposte nelle relazioni precedenti. Purtroppo la matrice di smorzamento  $[c]$  non è in generale diagonalizzata dagli autovettori che diagonalizzano la  $[m]$  e  $[k]$ , a meno che essa non sia ad esse proporzionale

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k]$$

Allora

$$12) \quad [\phi]^{-1} [c] [\phi] = [c_d] = \left[ \begin{array}{c} \ddots \\ 2\xi\omega_o \\ \ddots \end{array} \right]$$

Come si può facilmente ricavare il termine r-esimo della matrice diagonale di smorzamento è

$$13) \quad 2\xi_r \omega_{or} \quad \text{con} \quad \xi_r = \frac{\alpha + \beta \omega_{or}^2}{\omega_{or}}$$

Da qui si vede che una matrice di smorzamento proporzionale alla massa ha un fattore di smorzamento che diminuisce con l'aumentare della frequenza propria, mentre per una con smorzamento proporzionale alla rigidità succede il contrario.

In genere la proporzionalità della matrice di smorzamento alla massa ed alla rigidità costituisce una approssimazione della vera matrice di smorzamento ed è difficile trovare valori di  $\alpha$  e  $\beta$  che vadano bene per un vasto campo di frequenze. In pratica si preferisce fissare i valori di  $\xi_r$  per ogni frequenza propria.

La conoscenza della matrice degli autovettori  $[\Phi]$  scalati in modo da soddisfare alla prima delle 11 e la conoscenza degli autovalori che costituiscono la diagonale della matrice  $\left[ \begin{array}{c} \ddots \\ \omega_o^2 \\ \ddots \end{array} \right]$  corrisponde all'aver eseguito l'analisi modale del sistema 8). La matrice degli autovettori prende il nome di matrice modale e contiene in ogni colonna l'autovettore che viene chiamato forma modale scalata a matrice modale unitaria.

Il sistema 8) viene scritto nella forma disaccoppiato equivalente

$$[I]\{\ddot{q}\} + \left[ \begin{array}{c} \ddots \\ 2\xi\omega_o \\ \ddots \end{array} \right]\{\dot{q}\} + \left[ \begin{array}{c} \ddots \\ \omega_o^2 \\ \ddots \end{array} \right]\{q\} = [\varphi]^T \{f\} = \{t\}$$

$$8') \quad \{x\} = [\varphi]\{q\}$$

La prima è il sistema di equazioni differenziali di moto del sistema scritta nelle coordinate fittizie  $\{q\}$  dette coordinate modali, la seconda, note le  $\{q\}$ , consente di ritrovare le coordinate fisiche  $\{x\}$  ovvero gli spostamenti dei gradi di libertà del sistema.

La matrice diagonale  $\left[ \begin{array}{c} \ddots \\ \omega_o^2 \\ \ddots \end{array} \right]$  viene organizzata in modo da contenere gli autovalori ordinati dal più piccolo al più grande e di conseguenza si organizzano le colonne della matrice  $[\Phi]$ .

Ciascuna delle equazioni differenziali è del tipo

$$14) \quad \ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_{or} \dot{q}_r + \omega_{or}^2 q_r = \{\varphi\}_r^T \{f\} = t_r \quad r = 1, 2, \dots, n$$

Dove con  $\{\varphi\}_r$  si è indicata la r-esima colonna della matrice delle forme modali  $[\Phi]$ . Questa è chiaramente l'equazione di un sistema ad un grado di libertà di massa unitaria, rigidità  $\omega_{or}^2$  e smorzamento  $2\xi_r \omega_{or}$ , che si muove della quantità  $q_r$  sotto l'effetto della forza  $t_r$  che si chiama forza modale. Ognuna di queste equazioni può essere risolta da sola e ci consente di trovare, dalla seconda delle 8') la i-esima coordinata fisica con

$$15) \quad x_i = \sum_{r=1}^n \varphi_{ir} q_r = \varphi_{i1} q_1 + \varphi_{i2} q_2 + \dots + \varphi_{in} q_n \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ovvero ciascuna coordinata fisica è la combinazione lineare delle coordinate modali con coefficienti della combinazione lineare dati dalle forme modali.

In altre parole il sistema 8) ad n gradi di libertà può essere visto come fosse scomposto in n sistemi ad un grado di libertà.

L'analisi modale è quindi un potente metodo di semplificazione per risolvere un sistema complesso. Oltre che essere utile per facilitare la soluzione, consente anche di interpretare molto bene le proprietà del sistema, visto come sovrapposizione degli effetti di n sistemi ad un grado di libertà dei quali conosciamo tutto. In particolare il sistema r-esimo della 14) ha funzione di trasferimento

$$16) \quad H_r(s) = \frac{Q_r(s)}{T_r(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\xi_r \omega_{or} s + \omega_{or}^2}$$

Il termine generico  $H_{ij}$  della matrice  $[H]$  nella 9) rappresenta la funzione di trasferimento

$$H_{ij}(s) = \frac{X_i(s)}{F_j(s)}$$

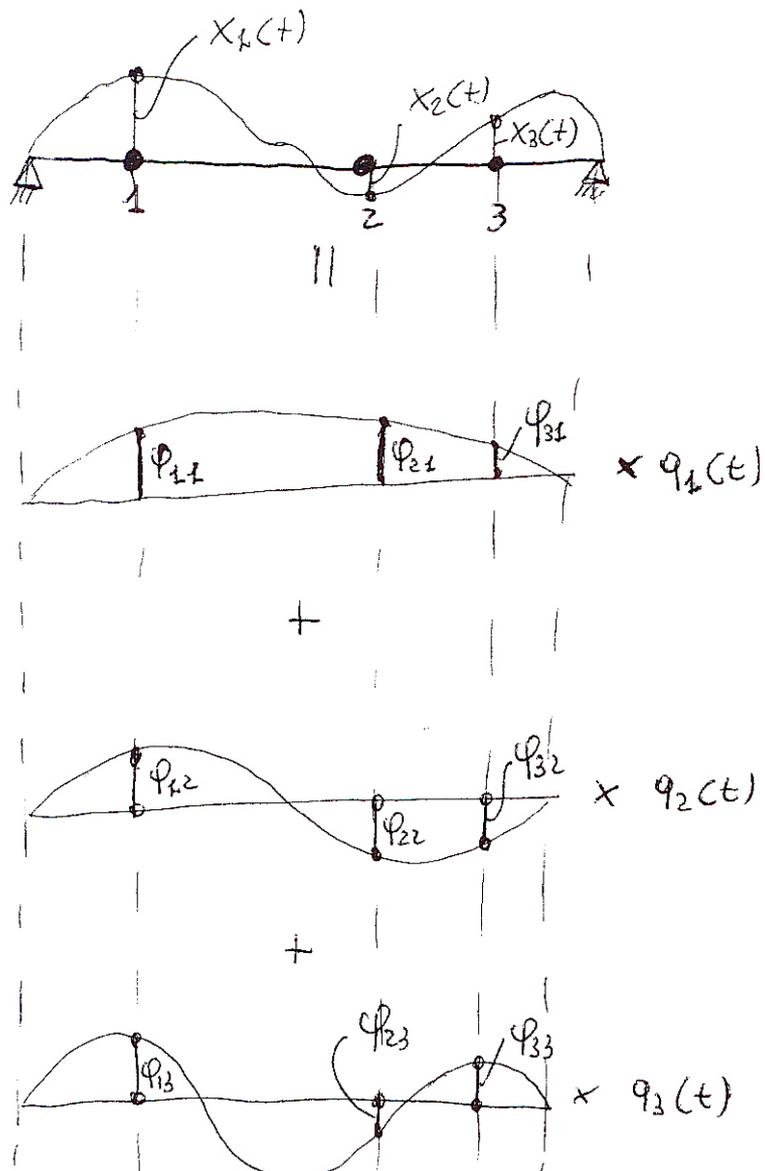
Ovvero il rapporto tra le trasformate della risposta al grado di libertà i quando al sistema applico solo una forza al grado di libertà j. Questo termine possiamo ora facilmente determinarlo. Supponiamo infatti che sia attivo solo l'r-esimo degli n sistemi ad un grado di libertà che scompongono il nostro sistema. In tal caso

$$X_i = \varphi_{ir} Q_r \quad e \quad t_r = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \end{array} \right\}^T = \varphi_{jr} F_j \quad \text{dalla 16) } H_{ij} = \varphi_{ir} \varphi_{jr} H_r$$

Estendendo a tutti i sistemi ad un grado di libertà mediante la sommatoria abbiamo

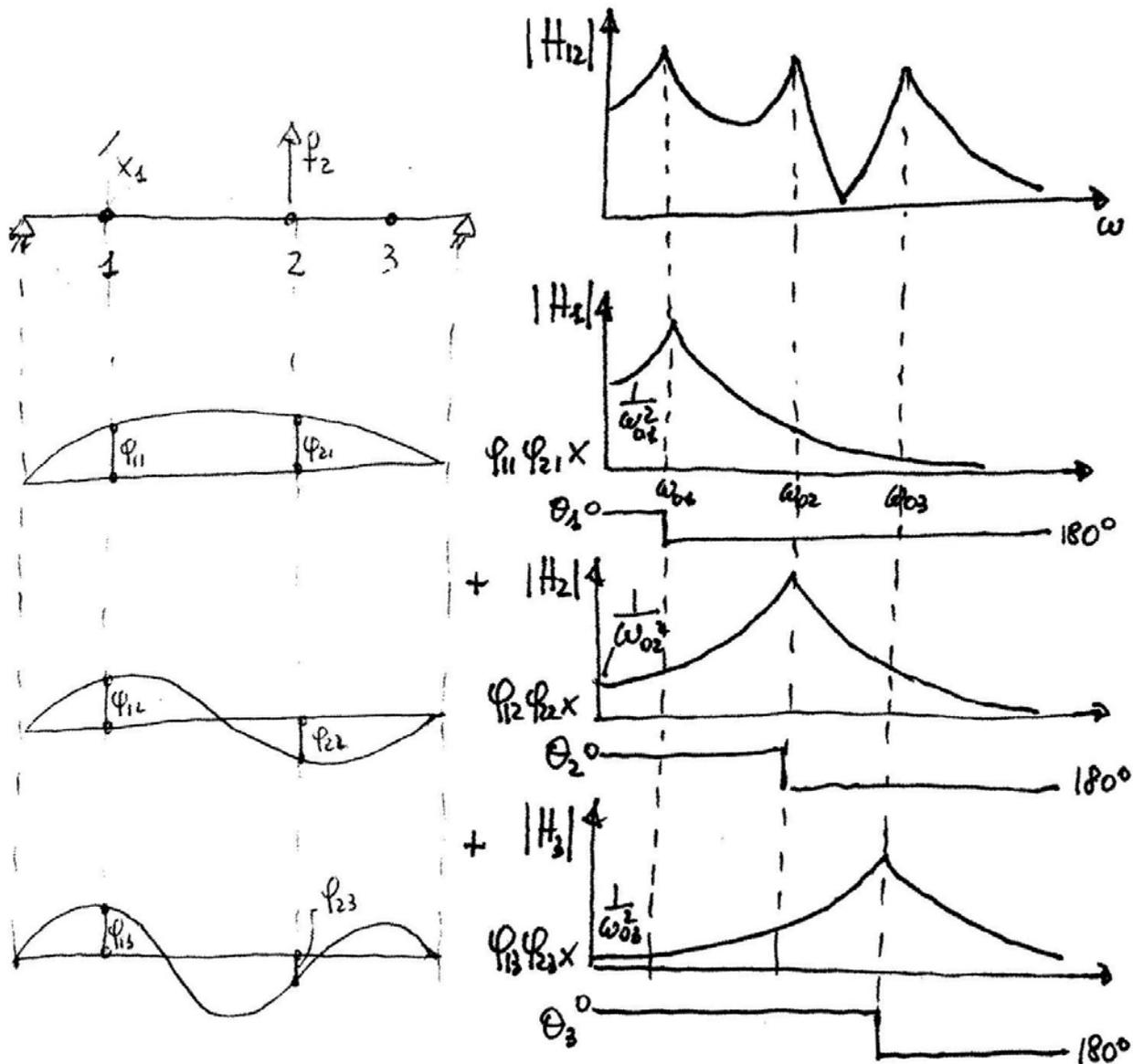
$$17) \quad H_{ij}(s) = \frac{X_i(s)}{F_j(s)} = \sum_{r=1}^n \varphi_{ir} \varphi_{jr} H_r(s)$$

I risultati ottenuti sono di notevole interesse ed utilità. Vediamo di darne una interpretazione con riferimento ad un sistema semplice quale può essere la vibrazione flessionale di un albero ridotta a considerare lo spostamento di 3 punti sui quali può essere applicata una forza. La figura 11 illustra la relazione 15) rendendo palese come la risposta  $x(t)$ , molto complicata, sia in realtà esprimibile come la somma delle risposte modali  $q(t)$  moltiplicate per la rispettiva forma modale.



**Figura 11: Risposta forzata come combinazione lineare delle coordinate modali per le forme modali (Relazione 15)**

La figura seguente mostra invece la ricostruzione della risposta in frequenza  $H_{12}$  secondo la relazione 17)



**Figura 12: Risposta in frequenza come combinazione lineare delle risposte dei sistemi ad 1 GDL per le forme modali (relazione 17)**

La risposta  $H_{12}$  è chiaramente data dalla somma delle risposte in frequenza dei sistemi ad 1 GDL  $H_{1,H2}$  ed  $H_3$ , moltiplicate per il prodotto delle forme modali dei GDL di risposta e di eccitazione. La  $H_{12}$  esibisce tre risonanze, in corrispondenza della risonanza di ciascun sistema ad 1 GDL. Sotto ciascuna risposta è riportata anche la fase che parte da 0 gradi ed arriva a  $180^\circ$  dopo la risonanza. Per sommare i contributi dobbiamo tener conto del segno di  $(\varphi_{ir} \varphi_{jr})$  che, se negativo, inverte la fase della  $r$ -esima  $H_r$ . Quindi, in mezzo a due risonanze, le funzioni si sommano se hanno fase concorde, si sottraggono se hanno fase discorde. Entrambe le circostanze si verificano nell'esempio. Tra le prime due risonanze le fasi di  $H_1$  ed  $H_2$  sono concordi, mentre tra la seconda e terza risonanza sono discordi. Tra la seconda e terza risonanza troviamo un minimo pronunciato della  $H_{12}$  che prende il nome di antirisonanza. Tale minimo, teoricamente nullo se ci fossero i soli contributi di  $H_2$  ed  $H_3$ , fa sì che a quella frequenza, una forza produce una piccola risposta, ovvero lo spostamento nel primo grado di libertà è quasi insensibile alla presenza di una forza applicata al secondo grado di libertà. Tale circostanza può utilmente essere sfruttata per minimizzare l'effetto di una forzante sulla risposta.

Se la forma di un modo relativa alla risposta o alla forzante fosse nulla allora il modo in questione non contribuirebbe alla  $H_{ij}$  che sarebbe priva del contributo di quel modo. Anche questa circostanza può essere utile sfruttata cercando di applicare le forze il più possibile vicine ai 'nodi' delle forme modali, rendendo quindi piccolo ed al limite nullo, il contributo del modo alla risposta.

### 3.1.2 Troncamento modale

Il numero  $n$  dei gradi di libertà del sistema può essere molto grande. Vedremo che mediante gli elementi finiti possiamo modellare un sistema complesso mediante migliaia se non milioni di gradi di libertà. Quindi avremo anche  $n$  modi di vibrare con frequenze proprie  $\omega_{or}$  via via crescenti e forme modali associate via via più complicate. E' ovvio che se la frequenza propria è molto grande rispetto alla frequenza delle forze che intendo applicare al sistema, anche la risposta a quella frequenza sarà piccola per non dire trascurabile. Quindi è lecito estendere le sommatorie della sovrapposizione modale fino ad un numero  $m$  di modi con  $m \ll n$ .

La 8') si può quindi scrivere

$$\begin{matrix} (m,m) & (m,1) & & (m,m) & (m,1) & & (m,m) & (m,1) & & (m,1) & & (m,1) \\ \left[ \begin{matrix} I \end{matrix} \right] \{ \ddot{q} \} + \left[ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} 2\xi\omega_o \cdot \right] \{ \dot{q} \} + \left[ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \omega_o^2 \cdot \right] \{ q \} = [\varphi]^T \{ f \} = \{ t \} \end{matrix}$$

8'')

$$\begin{matrix} (n,1) & (n,m) & (m,1) \\ \{ x \} \cong [\varphi] \{ q \} \end{matrix}$$

Il sistema differenziale ha ordine  $m \ll n$  e quindi è di gran lunga più semplice di quello completo, mentre l'approssimazione nella valutazione delle  $x$  (di tutte le  $x$ ) è molto buona, a patto di aver troncato i modi ad un numero  $m$  compatibile con le frequenze dell'eccitazione.

Anche la funzione di trasferimento  $H_{ij}$  nella formula 17) può essere ovviamente ottenuta in modo approssimato estendendo la sommatoria ai primi  $m$  modi di interesse anziché a tutti gli  $n$  modi teorici.

L'entità della semplificazione è in pratica molto grande, in quanto che un sistema con migliaia di gradi di libertà può essere spesso descritto con buona approssimazione con qualche decina di modi.

L'analisi modale quindi è utile per semplificare la soluzione del sistema e per rendere evidenti le caratteristiche del sistema, ma è anche utile per l'immediatezza con la quale si può ridurre l'ordine del sistema da  $n$  ad  $m$ . Ridurre l'ordine del sistema equivale a considerare di fatto un sistema con un numero minore di gradi di libertà. Con l'analisi modale gli  $m$  modi considerati (o meglio le relative coordinate modali) risultano essere i nuovi gradi di libertà del sistema.

## 4. MATRICI DI RIGIDEZZA

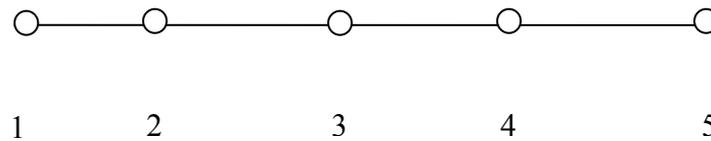
La matrice di rigidezza si può definire una volta scritte le equazioni di moto del sistema come abbiamo visto nell'esempio di figura 10. Ovviamente questo è il metodo meno efficiente se si pensa di applicarlo ad un sistema a molti gradi di libertà. Vedremo che, con gli elementi finiti, si può formalizzare un metodo che consente di definire matrici di rigidezza molto grandi in modo quasi automatico. Prima di questo è comunque utile soffermarci sulla matrice di rigidezza al fine di metterne in evidenza alcune proprietà.

Il caso particolare statico della equazione 8) è

c)  $[k]\{x\} = \{f\}$

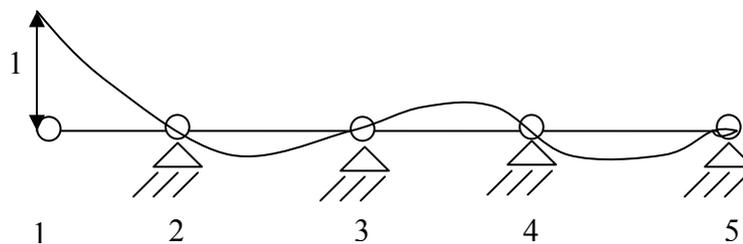
Ovvero, staticamente, la matrice di rigidezza lega tra loro gli spostamenti dei gradi di libertà e le forze in essi applicate.

Se sul il sistema che stiamo considerando, siamo in grado di applicare forze o spostamenti arbitrari e trovare i conseguenti spostamenti o forze che ne conseguono con un metodo qualunque, potremmo pensare di ricavare i termini incogniti della matrice di rigidezza. In particolare supponiamo di applicare spostamenti noti del tipo tutti gli spostamenti nulli eccetto uno che poniamo unitario.



Della trave continua in figura prendiamo in considerazione i 5 punti rappresentati e di essi consideriamo il solo spostamento verticale come grado di libertà. Su tale trave si potranno applicare solo forze di taglio nei punti considerati, in quanto che le forze devono essere ovviamente omologhe ai gradi di libertà. La matrice di rigidezza sarà una matrice 5x5 per ora incognita.

Pensando di applicare un campo di spostamenti noto come quello prima accennato, cominciando con uno spostamento unitario del primo grado di libertà e tutti gli altri nulli si avrà la situazione corrispondente alla figura sotto.

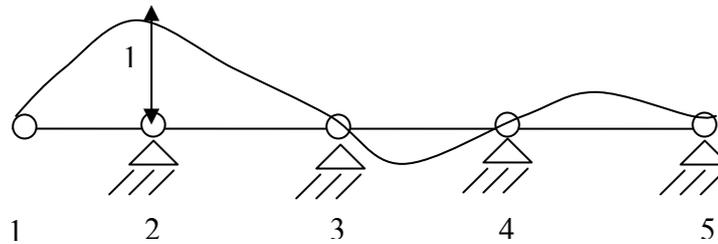


Risolviamo la struttura trovando le reazioni vincolari che sono necessarie a realizzare il campo di spostamenti imposto con un metodo qualsiasi di risoluzione della trave. La c) diviene

d) 
$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \\ k_{51} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix}$$

Ovvero la prima colonna della matrice di rigidezza si trova e coincide col vettore colonna delle reazioni vincolari trovate.

Analogamente la seconda colonna può trovarsi con riferimento al sistema



E la seconda colonna della matrice di rigidezza si può trovare da

$$e) \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \\ k_{42} \\ k_{52} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix}$$

Una prima osservazione ci permette di dire che, per il teorema di Betti,  $k_{ij}=k_{ji}$  e quindi la matrice è simmetrica. Infatti la reazione vincolare  $R_2$  in d) deve essere la uguale alla reazione vincolare  $R_1$  in e).

Si potrebbe continuare per trovare le altre colonne della matrice di rigidezza. Il metodo è senz'altro fattibile, anche se, ogni volta, richiede la soluzione di un sistema con tre iperstatiche per trovare le 5 reazioni vincolari. In ogni caso, dopo questa fatica, possiamo avere la matrice di rigidezza 5x5 che cercavamo.

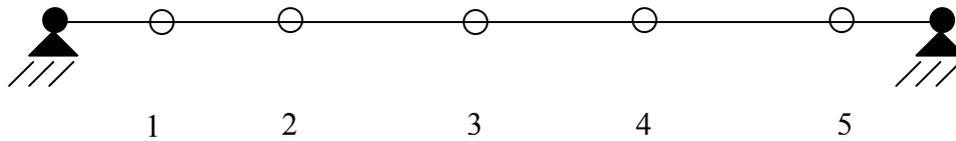
Se ci si riflette un po', il campo di spostamenti che abbiamo di volta in volta imposto, potevamo considerarlo con valore massimo  $\delta$  infinitesimo, anziché unitario. In tal caso avremmo potuto dire di aver applicato un campo di spostamenti virtuali congruenti cui corrispondevano le reazioni vincolari a costituire un sistema forze equilibrate. In pratica abbiamo fatto uso del teorema dei lavori virtuali nella forma degli spostamenti virtuali. Siccome del teorema dei lavori virtuali esiste la forma duale che è quella corrispondente ad applicare un campo di forze virtuali equilibrate, cui corrisponde un campo di spostamenti congruenti, si potrebbe pensare di applicare questa forma duale del teorema dei lavori virtuali. Tale forma sarebbe utile per trovare l'inversa della c) e cioè

$$f) \quad \{f\} = [k]^{-1} \{x\} = [A] \{x\}$$

dove la matrice  $[A]$  si chiama matrice di flessibilità ed è l'inversa della matrice di rigidezza.

Dunque, un campo di forze virtuali potrebbe essere del tipo forza unitaria al GDL 1 e forze nulle in tutti gli altri GDL. Si vede che è impossibile applicare tale campo di forze perché la trave non potrebbe stare in equilibrio muovendosi di moto rigido. Dunque non è possibile trovare la matrice di flessibilità. Ma questo implicherebbe che la f) non vale, il che non può essere vero!

Infatti la f) non vale in questo caso in cui la struttura da caratterizzare è inizialmente libera nello spazio e quindi labile. Se la struttura da caratterizzare fosse quella sotto, in cui i gradi di libertà sono quelli rappresentati da cerchietti bianchi, mentre in corrispondenza dei cerchietti neri ho vincoli fissi, allora sarebbe possibile applicare ai GDL le forze tutte nulle eccetto una di valore unitario, perché in corrispondenza dei vincoli fissi si genererebbero le relazioni vincolari utili ad equilibrare il sistema.



Con questo sistema, posso trovare la matrice di flessibilità 5x5 relativa ai gradi di libertà indicati e questa sarà l'inversa della matrice di rigidezza, che questa volta è invertibile, mentre nel caso di struttura labile la matrice di flessibilità non esiste in quanto la matrice di rigidezza non è invertibile, perché il sistema contiene moti rigidi.

Trovare la matrice di flessibilità per il sistema precedente, che ammette matrice di flessibilità, se sarebbe più semplice che non trovare la matrice di rigidezza. Infatti per ogni sistema di forze tutte nulle eccetto una che si applicano si deve risolvere un sistema isostatico, mentre per trovare la matrice di rigidezza dovrei di volta in volta risolvere un sistema 5 volte iperstatico.

Sembrerebbe quindi che la determinazione della matrice di flessibilità sia più semplice. In realtà questa indubbia semplicità la scontiamo se vogliamo imporre dopo al sistema diverse condizioni di vincolo, in quanto che la matrice di flessibilità fotografa il sistema con i vincoli che lo rendono perlomeno isostatico congelati, mentre la matrice di rigidezza descrive un sistema che può essere libero e che successivamente possiamo vincolare come più ci piace.

Il sistema descritto per trovare la matrice di rigidezza e/o di flessibilità non è assolutamente efficiente: si può ragionevolmente pensare di poter trovare le matrici solo per strutture semplici a trave. Tra queste, la più semplice, è quella di una asta (trave soggetta a solo sforzo normale), costituita da due GDL di spostamento lungo l'asse della trave stessa, come in figura.



Tanto per incominciare ad introdurre la terminologia degli elementi finiti, si tratta di un elemento a 2 nodi con un GDL per nodo. La trave è lunga L ha sezione di area A e materiale di modulo elastico E.

Usando il metodo di spostare un GDL di uno e l'altro bloccato per trovare la matrice di rigidezza troviamo con  $x_1=1$  e  $x_2=0$  che  $f_1=k_{11}=EA/L$   $f_2=k_{21}=-EA/L$  e quando  $x_1=0$  e  $x_2=1$  che  $f_1=k_{12}=-EA/L$   $f_2=k_{22}=EA/L$  e quindi

$$18) \quad [k]_{asta} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che se per lo stesso elemento consideriamo come grado di libertà del nodo la rotazione attorno all'asse della trave, allora avremmo la matrice di rigidezza che lega le rotazioni attorno all'asse ai momenti torcenti e questa matrice ha la stessa struttura della matrice precedente, ovvero

$$18') \quad [k]_{asta-torsione} = \frac{GJ_o}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dove  $J_0$  è il momento polare d'inerzia della sezione della trave.

## 5. CENNI DEL METODO AGLI ELEMENTI FINITI (FEM)

Il metodo agli elementi finiti è stato sviluppato con l'avvento del calcolo automatico e si applica a problemi governati da equazioni differenziali, quali sono i problemi di elasticità, ma anche numerosi altri campi di applicazione nella fisica matematica (calore, elettromagnetismo, etc). Non si pretende, sia pure nel campo delle strutture che qui ci interessa, di sviluppare il metodo, ma solo di dare alcune nozioni di base, utili a capire le problematiche che si incontrano nell'utilizzare uno dei tanti software disponibili che applicano il metodo stesso.

In generale un elemento finito è un oggetto piccolo definito da un certo numero di nodi  $n$  ognuno dei quali ha un certo numero di gradi di libertà  $m$ . Complessivamente quindi l'elemento finito ha  $n \cdot m$  GDL. Gli spostamenti e le omologhe forze sono espresse con riferimento ad un sistema di riferimento solidale con l'elemento indeformato che si chiama sistema di riferimento di elemento. Quindi avremo un vettore di spostamenti di dimensione  $n \cdot m$  che si lega al sistema di forze anch'esso un vettore  $n \cdot m$  attraverso la matrice di rigidezza di elemento di dimensioni  $(n \cdot m, n \cdot m)$ . I vettori spostamenti e forze sono in genere organizzati in modo da contenere in sequenza gli spostamenti di ogni nodo e le forze applicate a ciascun nodo. Questi vettori si chiamano vettori di spostamento e forze nodali.

Riferiamoci come esempio all'elemento triangolare nel piano schematizzato in figura

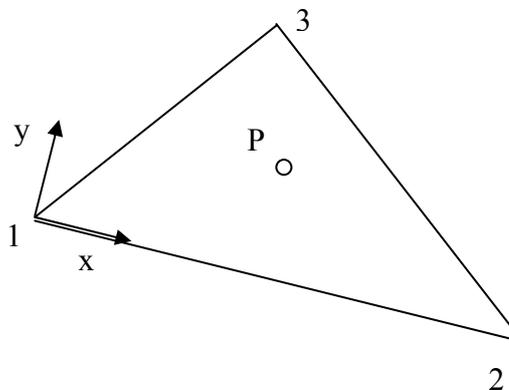


Figura 13: Elemento finito di esempio

Questo elemento ha 3 nodi e ciascuno di essi ha 2 gradi di libertà: può spostarsi in direzione  $x$  e  $y$  del sistema di riferimento di elemento e ricevere forze nelle stesse direzioni. Spostamenti e forze sono considerati positivi concordemente al sistema di riferimento di elemento.

Il vettore spostamenti nodali e forze nodali sono dati da



quanto più l'elemento finito è piccolo, in quanto che in un dominio piccolo le funzioni 'vere' sono meglio approssimate da polinomi di grado limitato.

L'asta sfugge a questa regola, nel senso che le sue funzioni di forma sono 'esatte', ovvero, secondo la teoria della trave soggetta a sforzo normale, il campo di spostamento interno all'asta è veramente una funzione lineare del punto.

La teoria dell'elasticità ci dice che, noto il campo di spostamenti interno al continuo, le deformazioni unitarie sono funzioni legate alle derivate di tale campo. Quindi possiamo simbolicamente scrivere che

$$21) \quad \{\varepsilon(P)\} = \frac{\partial}{\partial P} [N(P)] \{x\} = [B(P)] \{x\}$$

Dove l'operatore simbolico di derivazione sta ad indicare che si dovranno scrivere le necessarie relazioni di derivazione che legano il campo di spostamenti alle deformazioni unitarie, che, in generale, sono 6 componenti di deformazione unitaria.

Nel caso dell'asta abbiamo una sola deformazione unitaria interessante

$$\varepsilon_{xx}(P) = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \{x\} = [B(P)] \{x\}$$

Le equazioni costitutive, nel caso elastico lineare isotropo le equazioni di Lamè, legano poi le componenti di tensione, anch'esse 6 in generale, alle componenti di deformazione

$$22) \quad \{\sigma(P)\} = [D] \{\varepsilon(P)\} = [D] [B(P)] \{x\}$$

Quindi il vettore delle deformazioni unitarie in ogni punto dell'elemento ed il vettore delle tensioni, possono essere espressi, attraverso matrici di funzioni, in funzione degli spostamenti nodali.

Nel caso dell'asta si ha

$$\{\sigma(P)\} = E \{\varepsilon(P)\} = E \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \{x\}$$

Dove E è il modulo elastico del materiale.

Con le equazioni precedenti abbiamo scritto in pratica la congruenza della deformazione ed il legame tra tensione e deformazione. Con il teorema dei lavori virtuali nella forma degli spostamenti virtuali, introduciamo l'ultimo ingrediente per risolvere il problema. In pratica, assunto un campo di spostamenti virtuali nodali dobbiamo avere che le forze nodali compiono un lavoro che è il lavoro esterno introdotto nel sistema, che dovrà uguagliare il lavoro interno fatto dalle componenti di tensione.

$$L_e = \partial \{x\}^T \{f\} \quad L_i = \int_V \partial \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \partial \{x\}^T \left[ \int_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{x\}$$

Uguagliando e semplificando rimane definita la matrice di rigidità [k]

$$23) \quad [k] = \left[ \int_V [B]^T [D] [B] dV \right]$$

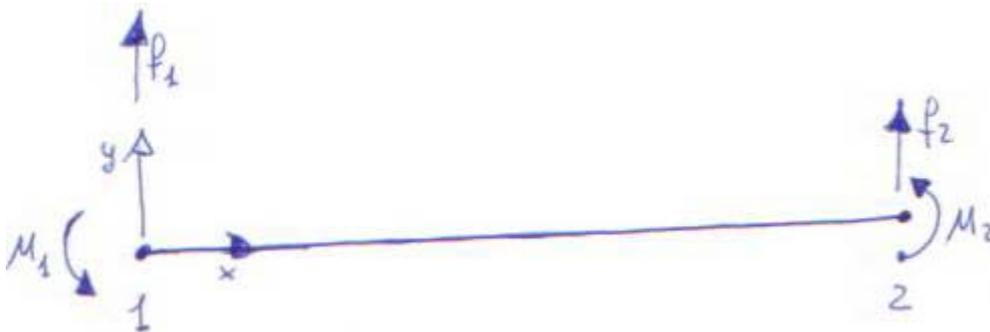
Nel caso dell'asta

$$[k] = \left[ \int_V \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dV = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

La 23) è la relazione che consente in maniera generale di trovare in modo efficiente la matrice di rigidezza di un elemento.

### 5.1.1 Matrice di rigidezza della trave inflessa nel piano

Con questo metodo troviamo la matrice di rigidezza della trave in flessa nel piano. Essa corrisponde alla topologia sotto schematizzata



È un elemento a due nodi con due gradi di libertà per nodo che sono lo spostamento lungo y e la rotazione attorno a z. Sui nodi si applicano quindi le forze di taglio in direzione y ed i momenti attorno a z. Abbiamo

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

Per il campo di spostamenti interni scegliamo la freccia della linea elastica e la sua derivata rispetto ad x, ovvero

$$\{x(P)\} = \begin{Bmatrix} y(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \right) & \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \right) & \left( -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \right) & \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right) \\ \left( \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \right) & \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \right) & \left( -\frac{6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \right) & \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

La matrice di funzioni di forma 2x4 ha ciascuna funzione che corrisponde a tener uno spostamento unitario e gli altri nulli, richiamando ancora il metodo manuale di calcolo della matrice di rigidezza. La trave è risolta in termini di caratteristiche di sollecitazione, ovvero delle risultanti delle tensioni sulla sezione della trave stessa. Ci conviene pertanto mantenere questa impostazione, per cui al posto delle deformazioni unitarie scegliamo la grandezza più utile che è, nel caso della trave in flessa, la curvatura.

$$\varepsilon(P) = \frac{1}{\rho(x)} = -\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \left[ \left( -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \right) \quad \left( -\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) \quad \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \quad \left( -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \right) \right] \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice [B(P)] è una 1x4 e avremmo anche potuto fare a meno di definire una delle righe della matrice [N(P)] delle funzioni di forma, che comunque è stata data per completezza.

La relazione di legame, al posto delle  $\varepsilon$  vede più convenientemente la caratteristica di sollecitazione di momento flettente. Quindi,

$$\{\sigma(P)\} = M(P) = EJ_z \frac{1}{\rho(x)}$$

Dunque abbiamo

$$[B(P)] = \left[ \left( -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \right) \quad \left( -\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) \quad \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \quad \left( -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \right) \right]$$

$$[D] = EJ_z$$

E dobbiamo applicare la formula 23) con l'integrale esteso alla lunghezza della trave. Troviamo

$$24) \quad [k]_{trave-inflessa} = 12 \frac{EJ_z}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$

Con la 24) e le 18) e 18') possiamo trovare la matrice di rigidezza della trave nello spazio che ha 6 gradi di libertà per nodo. Infatti se consideriamo i tagli agenti lungo z ed i momenti attorno ad y la stessa matrice precedente con  $J_y$  al posto di  $J_z$  risolve la trave in flessa nel piano x-z. La 18) risolve la trave a sforzo normale in direzione x e la 18') la trave a torsione. Definendo quindi il seguente vettore di spostamenti nodali e di forze nodali

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_1 \\ \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_2 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_1 \\ \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_2 \end{Bmatrix}$$

Basta costruire i termini della matrice di rigidezza 12x12 inserendo nella posizione i,j i termini appropriati presi dalla 18), 18') e 24).

## 5.2 Partizione della matrice di rigidezza di elemento

Per come abbiamo deciso di organizzare gli spostamenti e le forze nodali, se un elemento ha n nodi con m gradi di libertà per nodo abbiamo

$$25) \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} \{x\}_1 \\ \{x\}_2 \\ \vdots \\ \{x\}_n \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} \{f\}_1 \\ \{f\}_2 \\ \vdots \\ \{f\}_n \end{Bmatrix}$$

Che sono vettori di ordine (mxn,1) composti a loro volta da sottovettori di ordine (m,1) che contengono gli spostamenti e le forze di ciascun nodo.

La relazione

$$\{f\} = [k]\{x\}$$

Può essere vista con la matrice di rigidezza composta a sua volta da sottomatrici di ordine (m,m)

$$26) \quad \begin{Bmatrix} \{f\}_1 \\ \{f\}_2 \\ \vdots \\ \{f\}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k]_{11} & [k]_{12} & \dots & [k]_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ [k]_{n1} & [k]_{n2} & \dots & [k]_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_1 \\ \{x\}_2 \\ \vdots \\ \{x\}_n \end{Bmatrix}$$

La matrice di rigidezza è partizionata in sottomatrici. La sottomatrice [k]<sub>ij</sub> viene moltiplicata per lo spostamento del nodo j e dà il contributo del nodo j alla forza sul nodo i. La 26) è molto comoda perché consente di considerare formalmente i gradi di libertà nodali in un unico pacchetto e quindi adoperando i sottovettori e le sottomatrici è come se ogni nodo avesse un solo grado di libertà.

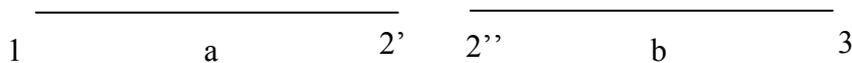
Naturalmente si possono organizzare in modo diverso gli spostamenti nodali se ne abbiamo la necessità. In tal caso bisogna scambiare di posto congruentemente le colonne della matrice di rigidezza. Qualora si voglia organizzare diversamente il vettore delle forze nodali bisogna

scambiare di posto congruentemente le righe della matrice di rigidezza. Vedremo più avanti che questa operazione è utile.

### 5.3 Matrice di struttura

Quanto abbiamo finora detto costituisce la base del metodo agli elementi finiti che è quella di poter caratterizzare il legame di rigidezza per un elemento. Ma un elemento è il mattone che consente, assemblando molti elementi insieme, di poter modellare una struttura complessa. Questa operazione deve essere formalizzata per accorgersi come l'assemblaggio di più elementi possa esser fatto facilmente in maniera automatica.

Per far questo prendiamo un elemento con un grado di libertà per nodo quale l'asta (le considerazioni del paragrafo 5.2 ci consentiranno di generalizzare facilmente adoperando per ciascun nodo dei sottovettori e delle sottomatrici, anziché degli scalari).



I due elementi asta a e b sono tra loro separati. Possiamo scrivere

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_{2'} \\ f_{2''} \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a \\ k_{21}^a & k_{22}^a \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_{11}^b & k_{12}^b \\ k_{21}^b & k_{22}^b \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_{2'} \\ x_{2''} \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Abbiamo scritto insieme le equazioni di ogni asta. Le aste continuano ad essere disaccoppiate. Per accoppiarle dobbiamo introdurre una condizione di congruenza ed una di equilibrio, ovvero

$$x_{2'} = x_{2''} = x_2$$

$$f_{2'}^a + f_{2''}^b = f_2$$

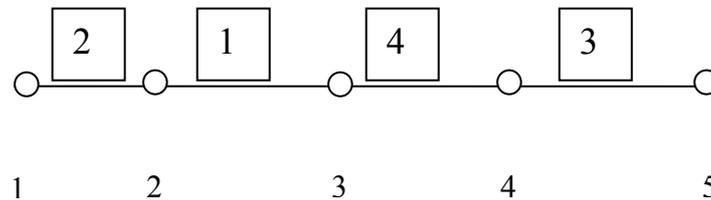
La prima impone che i nodi siano uniti tutti nel nodo 2 e la seconda è l'equazione di equilibrio al nuovo nodo 2 dove concorrono le due aste, ovvero le forze agenti sulle due aste separate devono uguagliare la forza esterna  $f_2$  che sarà applicata al nodo comune.

Le condizioni, aggiunte alla equazione matriciale delle aste separate porta

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a & 0 \\ k_{21}^a & k_{22}^a + k_{11}^b & k_{12}^b \\ 0 & k_{21}^b & k_{22}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Le aste connesse, ovvero la struttura con 3 nodi composta da due elementi ha una matrice di rigidezza ottenibile dalle matrici di rigidezza dei singoli elementi, sommando i termini delle matrici di rigidezza dei singoli elementi corrispondenti ai gradi di libertà uniti insieme. Questo principio si

applica all'assemblaggio di qualunque elemento, basta sommare ai gradi di libertà corrispondenti le sottomatrici che per ciascun elemento contengono quei gradi di libertà. Se i gradi di libertà che si accoppiano sono tutti quelli dei nodi degli elementi uniti, le sottomatrici corrispondono a quelle introdotte nella forma partizionata usuale della matrice di rigidezza viste nella 26). In tal caso, volendo per esempio trovare la matrice della struttura in figura



Formata da 4 elementi di trave in flessa con due gradi di libertà per nodo (lo spostamento verticale e la rotazione del nodo). La numerazione degli elementi è indicata nel quadratino e gli elementi sono stati numerati in maniera illogica, proprio per mettere in evidenza comunque l'automaticità del metodo di assemblaggio.



L'elemento ha la topologia sopra riportata. I nodi sono stati chiamati i e j ed il sistema di riferimento locale ha l'asse x orientato dal nodo i al nodo j. La matrice di rigidezza del k-esimo elemento, dalla 26) si può scrivere come

$$[k]_{el-k} = \begin{bmatrix} [k]_{ii} & [k]_{ij} \\ [k]_{ji} & [k]_{jj} \end{bmatrix}$$

Dove ciascuna sottomatrice è una matrice 2x2 derivante dalla 24). Compiliamo adesso la cosiddetta tabella di connettività degli elementi, che per ogni elemento individua il nodo i e j che colloca l'elemento stesso nella struttura. Per la nostra struttura avremo

Connettività		
EL	Nodo i	Nodo j
1	2	3
2	2	1
3	4	5
4	4	3

Si vede che anche gli elementi sono stati orientati in maniera illogica, nel senso il 2 ed il 4 avranno l'asse x orientato da sinistra a destra anziché da destra a sinistra come era più logico. La matrice di rigidezza di struttura sarà di ordine 10x10 (5 nodi con 2 gradi di libertà per nodo), ma noi la vediamo come una matrice di dimensione 5x5 come i nodi ed ogni locazione della matrice sarà in realtà occupata da una sottomatrice 2x2.

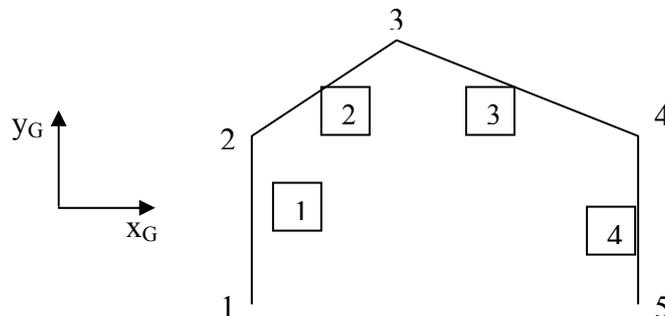
<i>Nodi</i>	1	2	3	4	5
1	$[k]_{jj}^2$	$[k]_{ji}^2$			
2	$[k]_{ij}^2$	$[k]_{ii}^1 + [k]_{ii}^2$	$[k]_{ij}^1$		
3		$[k]_{ji}^1$	$[k]_{jj}^1 + [k]_{jj}^4$	$[k]_{ji}^4$	
4			$[k]_{ij}^4$	$[k]_{ii}^3 + [k]_{ii}^4$	$[k]_{ij}^3$
5				$[k]_{ji}^3$	$[k]_{jj}^3$

Le locazioni non riempite contengono matrici 2x2 di zeri.

E' chiaro che questa procedura può essere facilmente automatizzata con un programma di calcolo a partire dalla conoscenza della tabella di connettività. La procedura, illustrata per una trave in flessa, è assolutamente generale e può essere applicata a qualunque tipo di elemento finito.

### 5.3.1 Riferimento globale di struttura

In una struttura gli elementi si collocano nel piano o nello spazio in relazione alla topologia dei nodi che definiscono la struttura. Negli esempi precedenti l'asta e le travi erano tutte allineate, per cui l'asse x del riferimento di elemento non cambiava mai direzione che rimaneva quello dell'asse della trave della struttura. Volendo realizzare una struttura come quella sotto



Bisogna definire un sistema di riferimento per l'intera struttura che chiamiamo sistema di riferimento globale e costruire la matrice di rigidezza con i gradi di libertà congruenti a questo sistema di riferimento. Nel caso in questione quindi ogni nodo avrà 3 gradi di libertà (x, y,  $\theta_z$ ) nel sistema di riferimento globale e le forze applicate ai nodi avranno ugualmente le stesse direzioni.

Considerando che l'elemento che costituisce ciascun tratto della travatura sia un elemento trave con tre gradi di libertà per nodo (spostamento lungo l'asse, spostamento perpendicolare all'asse, rotazione attorno all'asse z locale), bisogna relazionare gli spostamenti e le forze legati dalla matrice di rigidezza di elemento che nel sistema di riferimento locale di elemento agli stessi spostamenti e forze espressi invece nel sistema di riferimento globale.

Ai termini della relazione di rigidezza di elemento dobbiamo aggiungere il pedice l per evidenziare che sono espressi nel sistema di riferimento locale di elemento

$$\{f\}_l = [k]_l \{x\}_l$$

Possiamo trovare una matrice di trasformazione di coordinate [T] che lega spostamenti e forze nel sistema locale ai corrispondenti nel sistema globale

$$\{x\}_l = [T] \{x\}_G \quad ; \quad \{f\}_l = [T] \{f\}_G$$

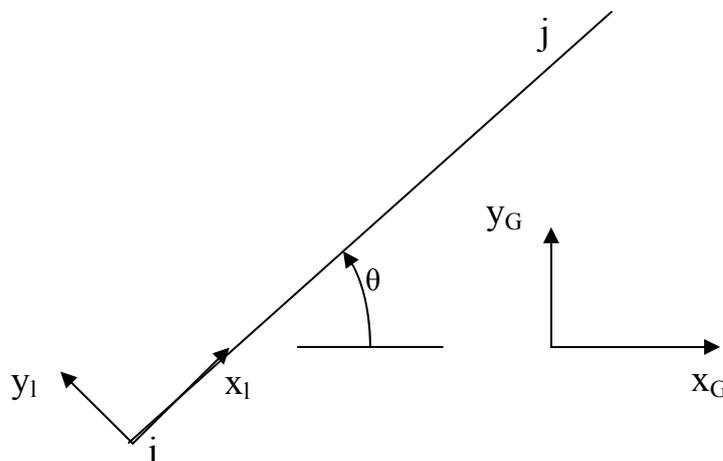
Sostituendo sopra otteniamo

$$27) \quad \{f\}_G = [T]^{-1} [k]_l [T] \{x\}_G \quad \text{ovvero} \quad [K]_G = [T]^{-1} [k]_l [T]$$

Quindi si perviene in pratica ad una matrice di rigidezza di elemento espressa nel sistema di riferimento globale.

Dunque, dati i nodi e la connettività, si deve calcolare per ciascun elemento la matrice di rigidezza nel sistema di riferimento globale e poi assemblare la matrice di struttura nella maniera vista precedentemente.

Considerando la trave nel piano con tre gradi di libertà per nodo



i gradi di libertà del nodo sono ordinati come (x,y,θz) nel sistema locale e lo stesso in quello globale.

La matrice [T] di trasformazione è

$$[T]_{trave} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

#### 5.4 Soluzione statica

Abbiamo a questo punto a disposizione la matrice di rigidità della struttura. Ora possiamo definire i vincoli ed i carichi ed ottenere la soluzione. Per far questo adottiamo il metodo di partizione della matrice come prima annunciato ed operiamo una riorganizzazione del vettore spostamenti e del vettore forze. Infatti i gradi di libertà che vincoleremo avranno un valore di spostamento assegnato e quindi noto. Le forze a questi gradi di libertà saranno invece reazioni vincolari e quindi incognite.

Di contro sui gradi di libertà non vincolati possiamo applicare forze esterne che saranno note, ma gli spostamenti sono all'inizio incogniti.

Chiamiamo B l'insieme dei gradi di libertà che saranno vincolati ed L l'insieme dei gradi di libertà non vincolati sui quali possiamo applicare forze note. Avremo, riorganizzando i vettori e quindi la matrice come prima descritto

$$\{f\} = [k] \{x\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \{f\}_L \\ \{f\}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k]_{LL} & [k]_{LB} \\ [k]_{BL} & [k]_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_L \\ \{x\}_B \end{Bmatrix}$$

Se n sono i gradi di libertà del sistema e b sono i gradi di libertà vincolati i vettori e la matrice partizionata hanno dimensioni L=n-b, B=b.

Dalla prima equazione del sistema precedente

$$\{f\}_L = [k]_{LL} \{x\}_L + [k]_{LB} \{x\}_B$$

Ovvero

$$\{x\}_L = [k]_{LL}^{-1} \{ \{f\}_L - [k]_{LB} \{x\}_B \} = [k]_{LL}^{-1} \{f\}_G$$

Avendo chiamato il vettore delle quantità note  $\{ \{f\}_L - [k]_{LB} \{x\}_B \}$  col simbolo  $\{f\}_G$  che significa forze generalizzate. Questo vettore di forze, applicate ai gradi di libertà non vincolati, è dato dalle forze esterne che abbiamo scelto di applicare e da altre forze equivalenti dipendenti dagli spostamenti imposti ai gradi di libertà vincolati. E' chiaro che se i vincoli hanno tutti spostamenti nulli le forze generalizzate si riducono alle sole forze esterne applicate. Adoperando anche la seconda equazione matriciale si ottiene

$$\{f\}_B = [k]_{BB} \{x\}_B + [k]_{BL} \{x\}_L$$

Da cui ricaviamo le reazioni vincolari incognite.

La soluzione del problema passa quindi per la soluzione del sistema lineare mediante l'inversione della matrice  $[k]_{LL}$  per trovare gli spostamenti incogniti  $\{x\}_L$  e poi da una equazione matriciale per trovare le reazioni vincolari. Riassumendo

$$\begin{aligned} \{x\}_L &= [k]_{LL}^{-1} \{ \{f\}_L - [k]_{LB} \{x\}_B \} = [k]_{LL}^{-1} \{f\}_G \\ 28) \quad \{f\}_B &= [k]_{BB} \{x\}_B + [k]_{BL} \{x\}_L \end{aligned}$$

Che è l'insieme delle operazioni per risolvere un problema agli elementi finiti.

La soluzione è quindi molto semplice da trovare: Basta costruire l'elenco dei gradi di libertà L e B coi quali ordinare i vettori e partizionare la matrice di rigidità.

Notiamo che la matrice  $[k]_{LL}$  da invertire è immediatamente ottenuta dalla matrice  $[k]$  della struttura eliminando le righe e le colonne corrispondenti ai gradi di libertà vincolati. Avevamo visto che la matrice di rigidità di struttura non è invertibile, in quanto consente al sistema moti rigidi. Il suo minore di ordine L nella 28) deve invece essere invertibile. Ciò avviene se si introduce un numero di vincoli che rende la struttura perlomeno isostatica. La matrice  $[k]_{LL}$  è la matrice di rigidità della struttura vincolata e la sua inversa è la matrice di flessibilità.

### 5.5 Matrice di massa

Per scrivere le equazioni del sistema dinamico occorre anche valutare la matrice di massa.

Procediamo quindi ad accennare come può essere valutata la matrice di massa di un elemento finito. Ricordiamo la 20) che fornisce il campo di spostamenti interni all'elemento in funzione degli spostamenti nodali

$$\{x(P)\} = [N(P)]\{x\}$$

Supponiamo che l'elemento sia soggetto ad una accelerazione  $\{\ddot{x}\}$  sui nodi e di conseguenza anche al punto interno P.

Applicando ancora il teorema dei lavori virtuali, avremo che il lavoro interno ed esterno sarà fatto dalle forze d'inerzia nodali e dalle forze d'inerzia distribuite. Sia  $\rho$  la densità del materiale, allora

$$L_e = \partial\{x\}^T \{f\}_{inerzia} \quad L_i = \int_V \partial\{x(P)\}^T \rho \{\ddot{x}(P)\} dV = \partial\{x\}^T \left[ \int_V \rho [N]^T [N] dV \right] \{\ddot{x}\}$$

da cui la matrice di massa è data da

$$29) \quad [m] = \left[ \int_V \rho [N]^T [N] dV \right]$$

Per l'asta si ha

$$[m]_{asta} = \frac{\rho AL}{3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Per la trave inflessa nel piano, la cui matrice di rigidezza è data in 24), la matrice di massa è

$$30) \quad [m]_{trave\_inflessa} = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210}L & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}L \\ \frac{11}{210}L & \frac{1}{105}L^2 & \frac{13}{420}L & -\frac{1}{140}L^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{420}L & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}L \\ -\frac{13}{420}L & -\frac{1}{140}L^2 & -\frac{11}{210}L & \frac{1}{105}L^2 \end{bmatrix}$$

Talvolta si può usare una forma semplificata della matrice di massa, che è una forma diagonale. Questa forma si dice a massa concentrata, mentre quella esatta si dice a massa consistente.

Nel caso dell'asta

$$[m]_{asta} \cong \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E nel caso della trave in flessa

$$[m]_{trave\_inflessa} \cong \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si deve in ogni caso notare che la somma di tutti i termini della matrice di massa deve fornire la massa dell'elemento moltiplicata per il numero di gradi di libertà di traslazione dell'elemento stesso.

La matrice di massa di elemento è trattata ugualmente a quella di rigidezza, quindi per essa valgono le stesse regole relative al cambiamento di riferimento e relative alla tecnica di assemblaggio per trovare la matrice di struttura.

## 5.6 Metodi di riduzione dei gradi di libertà

Una volta trovata la matrice di struttura sia di rigidezza che di massa, queste hanno in genere grandi dimensioni, in quanto che la struttura ha molti se non moltissimi gradi di libertà. E' importante quindi avere dei metodi che consentono la riduzione della dimensione del problema del sistema di equazioni 8) che riscriviamo

$$8) \quad \begin{matrix} (n,n)(n,1) & (n,n)(n,1) & (n,n)(n,1) & (n,1) \\ [m] \{ \ddot{x} \} + [c] \{ \dot{x} \} + [k] \{ x \} = \{ f \} \end{matrix}$$

Ci serve quindi, mantenendo l'accuratezza migliore possibile della soluzione di trovare una forma equivalente del sistema in cui n sia inferiore a quello di partenza.

Abbiamo visto che la riduzione ed il troncamento modale dati in 8'') che riscriviamo

$$\begin{matrix} (m,m) & (m,1) & & (m,m) & (m,1) & & (m,m) & (m,1) & & (m,1) & & (m,1) & & (m,1) \\ \left[ \begin{matrix} I \end{matrix} \right] \{ \ddot{q} \} + \left[ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right] 2\xi\omega_o \{ \dot{q} \} + \left[ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right] \omega_o^2 \{ q \} = [\varphi]^T \{ f \} = \{ t \} \end{matrix}$$

8'')

$$\begin{matrix} (n,1) & (n,m) & (m,1) \\ \{ x \} \cong [\varphi] \{ q \} \end{matrix}$$

Consente una efficace e notevole riduzione da n ad m con m molto più piccolo di n.

Tuttavia questo non è l'unico modo di riduzione ed a volte non è facilmente applicabile: infatti se pensiamo, dopo aver ridotto il sistema con la 8'') di applicare condizioni di vincolo si vede chiaramente che tali condizioni vanno applicate al vettore  $\{x\}$  il che implica di fatto di determinare alcuni valori del vettore  $\{q\}$ , cosa non sempre (anzi, quasi mai) agevole.

Dunque dobbiamo descrivere altri metodi di riduzione.

### 5.6.1 Riduzione di GUYAN

La riduzione di Guyan è un procedimento classico, che nei codici agli elementi finiti sta anche alla base della definizione dei superelementi, ovvero della sintesi di un elemento composto da molti elementi di base.

Per ricavare la riduzione di Guyan, raggruppiamo tutti i gradi di libertà che vogliamo preservare nell'insieme B (Master DOF) e tutti gli altri nell'insieme L (Slave DOF).

La relazione statica si potrà quindi scrivere così in forma partizionata.

$$\begin{Bmatrix} \{f\}_B \\ \{f\}_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k]_{BB} & [k]_{BL} \\ [k]_{LB} & [k]_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_B \\ \{x\}_L \end{Bmatrix}$$

Prevediamo di poter applicare le forze ed i vincoli solo su alcuni dei gradi di libertà B, per cui

$$\begin{Bmatrix} \{f\}_B \\ \{0\}_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k]_{BB} & [k]_{BL} \\ [k]_{LB} & [k]_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_B \\ \{x\}_L \end{Bmatrix}$$

La seconda equazione matriciale ci fornisce quindi

$$\{x\}_L = -[k]_{LL}^{-1} [k]_{LB} \{x\}_B$$

Che introdotta nella prima dà

$$\{f\}_B = [[k]_{BB} - [k]_{BL} [k]_{LL}^{-1} [k]_{LB}] \{x\}_B$$

Introducendo

$$31) \quad [k]_R = [[k]_{BB} - [k]_{BL} [k]_{LL}^{-1} [k]_{LB}]$$

Si ha un sistema statico ridotto

$$\{f\}_B = [k]_R \{x\}_B$$

Di dimensione m quanti sono l'insieme dei gradi di libertà master B.

Possiamo poi ritrovare il valore dei gradi di libertà Slave dalla prima relazione trovata in funzione degli spostamenti dei master.

La 31) fornisce una matrice di rigidezza ridotta che ‘condensa’ la rigidezza del sistema nei soli gradi di libertà master. Questa relazione è esatta, quindi si compie una efficace riduzione senza nessuna approssimazione.

Finora però abbiamo effettuato una riduzione solo per il caso statico, ma ci interessa invece ridurre il sistema 8) completo. Quindi dobbiamo anche effettuare una ‘condensazione’ analoga dell’inerzia sui gradi di libertà master.

Si dimostra che è possibile condensare l’inerzia con questa relazione

$$32) \quad [m]_R = [[m]_{BB} - [k]_{BL} [k]_{LL}^{-1} [m]_{LB} - [m]_{LB} [k]_{LL}^{-1} [k]_{LB} + \\ + [k]_{BL} [k]_{LL}^{-1} [m]_{LL} [k]_{LL}^{-1} [k]_{LB}]$$

Purtroppo però la condensazione dell’inerzia comporta una approssimazione tanto più sensibile quanto più piccolo è il numero m dei gradi di libertà master. Inoltre questa approssimazione, a parità del numero m dei gradi di libertà master, dipende anche da quali degli n gradi di libertà scegliamo come master. Quindi il sistema 8) scritto con le matrici ridotte in pratica potrà avere un numero m di gradi di libertà master non molto piccolo.

### 5.6.2 Riduzione di GRAIG-BAMPTON (CMS)

Se confrontiamo la prima delle 28) con la prima relazione trovata per la riduzione di Guyan

$$\{x\}_L = -[k]_{LL}^{-1} [k]_{LB} \{x\}_B$$

Si vede che sono la stessa cosa, supponendo le forze  $\{f\}_L = \{0\}$ .

Questa fornisce staticamente una relazione tra i gradi di libertà slave e gli spostamenti dei gradi di libertà master. Possiamo definire

$$a) \quad -[k]_{LL}^{-1} [k]_{LB} = [\varphi]_C \quad \rightarrow \quad \{x\}_L = [\varphi]_C \{x\}_B$$

La matrice  $[\varphi]_C$  è una matrice di trasformazione lineare. La colonna r di questa matrice fornisce gli spostamenti dei gradi di libertà L quando tutti i gradi di libertà B sono bloccati, eccetto l’r-esimo che è spostato della quantità unitaria. Dunque gli spostamenti L possono essere pensati come la combinazione lineare degli spostamenti B moltiplicati per il relativo vettore colonna della  $[\varphi]_C$ .

Alla matrice  $[\varphi]_C$  si può attribuire il significato di matrice che contiene come colonne le forme di spostamento dei gradi di libertà L con i B bloccati eccetto uno.

D’altra parte il sistema libero lo potremmo pensare come la sovrapposizione di sistemi costituiti dal sistema con tutti i gradi di libertà B bloccati e dagli m sistemi derivanti dal bloccare tutti gradi di libertà B eccetto uno descritti dalle colonne di  $[\varphi]_C$ .

Il sistema con tutti i gradi di libertà B bloccati ha equazione

$$[m]_{LL} \{\ddot{x}\}_L + [k]_{LL} \{x\}_L = \{f\}_L$$

E su di questo potremmo eseguire una analisi modale, riducendolo a

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \cdot \cdot 2\xi\omega_o \cdot \cdot \end{bmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} \cdot \cdot \omega_o^2 \cdot \cdot \end{bmatrix} \{q\} = [\varphi]_L^T \{f\}_L = \{t\}_L$$

$$\{x\}_L \cong [\varphi]_L \{q\}$$

Avendo troncato la base modale ad un numero p di modi ritenuti sufficienti.

Si può quindi pensare che il sistema libero completo abbia spostamenti L esprimibili come

$$\{x\}_L \cong [\varphi]_C \{x\}_B + [\varphi]_L \{q\}$$

E quindi l'insieme degli spostamenti del sistema completo è dato da

$$\begin{Bmatrix} \{x\}_B \\ \{x\}_L \end{Bmatrix} \cong \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\varphi]_C & [\varphi]_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_B \\ \{q\} \end{Bmatrix}$$

Ponendo

$$33) \quad [\varphi]_{cb} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\varphi]_C & [\varphi]_L \end{bmatrix} \quad \{z\} = \begin{Bmatrix} \{x\}_B \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} \{x\}_B \\ \{x\}_L \end{Bmatrix}$$

Il sistema completo si può scrivere

$$[m] \quad \{\ddot{x}\} + [k] \quad \{x\} = \{f\}$$

$$\begin{bmatrix} [m]_{BB} & [m]_{BL} \\ [m]_{LB} & [m]_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\}_B \\ \{\ddot{x}\}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k]_{BB} & [k]_{BL} \\ [k]_{LB} & [k]_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_B \\ \{x\}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\}_B \\ \{f\}_L \end{Bmatrix}$$

E applicando la trasformazione lineare 33)

$$[\varphi]_{cb}^T [m] [\varphi]_{cb} \{\ddot{z}\} + [\varphi]_{cb}^T [k] [\varphi]_{cb} \{z\} = [\varphi]_{cb}^T \{f\}$$

Poniamo

$$[m]_G = [\varphi]_{cb}^T [m] [\varphi]_{cb} \quad [k]_G = [\varphi]_{cb}^T [k] [\varphi]_{cb}$$

Abbiamo che il sistema completo è costituito da

$$[m]_G \{\ddot{z}\} + [k]_G \{z\} = [\varphi]_{cb}^T \{f\}$$

$$34) \quad \{x\} = [\varphi]_{cb} \{z\}$$

Le 34) rappresentano la riduzione di Craig Bampton anche chiamata CMS (Component Mode Synthesis). Il sistema di equazioni differenziali accoppiate ha una dimensione molto minore degli n gradi di libertà del sistema originale. La sua dimensione è data da m+p dove m sono i gradi di libertà B che rimangono esplicitamente inalterati dalla trasformazione e p è il numero di modi normali che intendiamo considerare per il sistema con gradi di libertà B bloccati.

E' facile vedere, riflettendo un po', che risulta semplice introdurre vincoli sui gradi di libert  B e quindi la riduzione di Graig-Bampton consente di avere un sistema libero ridotto che pu  essere vincolato a piacere a patto di imporre gli spostamenti solo sui gradi di libert  B.

Le equazioni in 34) possono essere facilmente disaccoppiate eseguendo una analisi modale, ovvero trovando autovalori ed autovettori di  $[m]_G$  e  $[k]_G$ .

E' chiaro che sul sistema disaccoppiato non possiamo eseguire un ulteriore troncamento modale per non perdere la possibilit  di vincolare i gradi di libert  B, quindi di questo dobbiamo conservare tutti gli  $m+p$  modi.

I modi che disaccoppiano il sistema 34) conteranno anche i modi rigidi del sistema (modi a frequenza nulla) ed i modi elastici saranno per  un po' diversi da quelli ottenuti disaccoppiando direttamente il sistema libero, perch  sono modi che, insieme ai rigidi, consentono di annullare esattamente gli spostamenti totali B.

Sia per la riduzione di Guyan che per quella di Craig-Bampton abbiamo considerato nulla la matrice di smorzamento  $[C]$ . Con lo smorzamento le equazioni trovate non valgono e non esiste ad oggi una formulazione che consenta di operare riduzioni considerando anche la matrice  $[C]$ . Confidando per  sul fatto che lo smorzamento   in generale piccolo, i metodi trovati si possono tranquillamente applicare e lo smorzamento pu  essere introdotto a posteriori come smorzamento modale nella forma disaccoppiato dei sistemi ridotti.

## 6.1 Moto del vincolo

Riprendendo i concetti che ci hanno condotto a ricavare la riduzione di Craig-Bampton, possiamo risolvere il problema di un sistema che viene eccitato mediante accelerazioni imposte ai gradi di libert  B.

Consideriamo infatti un sistema senza smorzamento in cui non applichiamo forze sui gradi di libert  L, mentre imponiamo ai gradi di libert  B degli spostamenti imposti variabili nel tempo.

$$[m] \quad \{\ddot{x}\} + [k] \quad \{x\} = \{f\}$$

$$\begin{bmatrix} [m]_{BB} & [m]_{BL} \\ [m]_{LB} & [m]_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\}_B \\ \{\ddot{x}\}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k]_{BB} & [k]_{BL} \\ [k]_{LB} & [k]_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_B \\ \{x\}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\}_B \\ \{0\}_L \end{Bmatrix}$$

Consideriamo che

$$\{x\}_L = [\varphi]_C \{x\}_B + \{\bar{x}\}_L$$

Ovvero esprimiamo gli spostamenti liberi come somma degli spostamenti prima visti del sistema con nodi B bloccati eccetto uno e di spostamenti non ancora definiti  $\{\bar{x}\}_L$ .

Introducendo questa posizione nella seconda delle equazioni del sistema

$$[m]_{LL} \{\ddot{\bar{x}}\} + [k]_{LL} \{\bar{x}\} = -[[m]_{LB} + [m]_{LL}[\varphi]_C] \{\ddot{x}\}_B - [[k]_{LB} + [k]_{LL}[\varphi]_C] \{x\}_B$$

Ricordando la definizione a) del par. 5.6.2 di  $[\varphi]_C$  si vede che

$$[[k]_{LB} + [k]_{LL}[\varphi]_C] = [0]$$

Si vede che l'equazione sopra è l'equazione del sistema con tutti i gradi di libertà B bloccati con applicate sui gradi di libertà L delle forze generalizzate dipendenti solo dalle accelerazioni dei gradi di libertà B. Il significato fisico degli spostamenti  $\{\bar{x}\}$  è quindi quello di aliquota di spostamenti L sul sistema a gradi di libertà B bloccati. Ricordiamo che finora, a parte il trascurare lo smorzamento, non abbiamo fatto alcuna approssimazione. Se ora facciamo l'analisi modale del sistema a gradi di libertà B bloccati e prendiamo solo p modi, possiamo esprimere

$$\{\bar{x}\} \cong [\varphi]_L \{q\}$$

E quindi

$$35) \begin{cases} [I] \{\ddot{q}\} + [2\xi\omega_o] \{\dot{q}\} + [\omega_o^2] \{q\} = -[\varphi]_L^T [[m]_{LB} + [m]_{LL}[\varphi]_C] \{\ddot{x}\}_B = [\gamma] \{\ddot{x}\}_B \\ \{\bar{x}\} \cong [\varphi]_L \{q\} \end{cases}$$

Costituisce il sistema risolvibile disaccoppiato per  $\{\bar{x}\}$ .

Abbiamo posto

$$36) [\gamma] = -[\varphi]_L^T [[m]_{LB} + [m]_{LL}[\varphi]_C]$$

Che si chiama matrice dei fattori di partecipazione modale per moto della base. Possiamo poi facilmente ritrovare le accelerazioni totali dei gradi di libertà L da

$$37) \{\ddot{x}\}_L \cong [[\varphi]_C \quad [\varphi]_L] \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\}_B \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix}$$

Con queste relazioni di base è possibile risolvere tutti i casi di eccitazione del vincolo e quindi di valutare le trasmissibilità nei sistemi a più gradi di libertà. Torneremo sull'argomento con esempi specifici.

Notiamo ulteriormente che l'equazione banale

$$\{\ddot{x}\}_B = \{\ddot{x}\}_B$$

Può anche essere scritta come

$$38) \begin{cases} [I]\{\ddot{q}_1\} + [0]\{\dot{q}_1\} + [0]\{q_1\} = \{\ddot{x}\}_B \\ \{x\}_B = \{q_1\} \end{cases}$$

Questo è un sistema modale con frequenze proprie nulle pari a m che è il numero di gradi di libertà B e forme modali pari all'identità di ordine m. Ha come ingresso  $\{\ddot{x}\}_B$  e come uscita  $\{x\}_B$ , ovvero funziona come un integratore doppio che porta da accelerazione a spostamento. Unito al 35) che ha come ingressi  $\{\ddot{x}\}_B$  e come uscite  $\{\bar{x}\}_L$  va a costituire un sistema di equazioni disaccoppiate. Da questi due sistemi uniti si può trovare la relazione tra  $\{\ddot{x}\}_B$  e  $\{x\}_L$  totale.

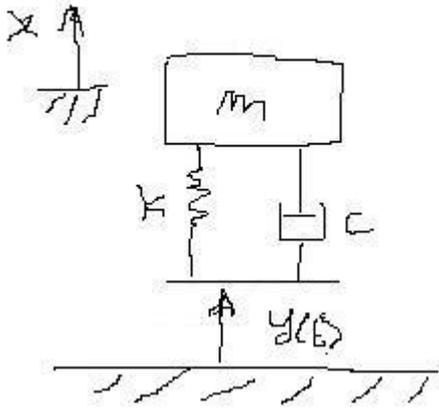
$$37') \quad \{x\}_L \cong [[\varphi]_C \quad [\varphi]_L] \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\}_B \\ \{q\} \end{Bmatrix}$$

Che è l'analogia della 37) che ci fornisce le accelerazioni dei gradi di libertà L in funzione degli ingressi al sistema  $\{\ddot{x}\}_B$ .

## 6.2 Valutazione del sisma

I concetti espressi in precedenza ci consentono anche di spiegare il metodo che, secondo normativa, viene usato per calcolare le sollecitazioni sismiche sulle strutture.

Cominciamo con un semplice esempio su di un sistema ad 1 grado di libertà come quello di Figura 8 che riportiamo



Lo spostamento del vincolo  $y(t)$  provocato dal sisma viene di solito dato in termini di accelerazione del vincolo  $\ddot{y}(t)$ , perché i terremoti vengono rilevati da accelerometri.

Per la sollecitazione della struttura è interessante non tanto lo spostamento assoluto della massa, ma quello elastico  $(x-y)$  che moltiplicato per  $k$  fornisce la forza della molla e quindi da questo si può calcolare la sollecitazione dell'elemento che costituisce la molla.

Detto  $x_e = (x-y)$ , l'equazione da cui abbiamo derivato la trasmissibilità diviene

$$a) \quad \ddot{x}_e + 2\xi\omega_0\dot{x}_e + \omega_0^2x_e = -\ddot{y}$$

Tale sistema ha una funzione di trasferimento

$$\frac{X_e}{\ddot{Y}} = H(s) = -\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \quad \rightarrow h(t) = L^{-1}(H(s))$$

La  $h(t)$  è la risposta all'impulso.

Interessa il massimo valore assoluto di  $x_e$ , che noto l'andamento temporale di  $\ddot{y}(t)$  può essere espresso mediante la 2'' da

$$x_{e\max} = \left| \int_0^T \ddot{y}(t)h(t-\tau)d\tau \right|_{\max}$$

Dato l'accelerogramma del sisma  $\ddot{y}(t)$  il valore di  $x_{e\max}$  dipende dalle caratteristiche del sistema ovvero da  $\omega_0$  e  $\xi$ . Pertanto, per ognuno di questi valori e per una categoria di sismi tipici (facendo la media dei valori su diversi accelerogrammi, si può tracciare un grafico di  $x_{e\max}$ .

Si definisce

$$39) \quad S_x = x_{e\max}$$

Che si chiama spettro di risposta in spostamento.

Quando ho il valore di  $x_{e\max}$  la velocità è nulla.

La forza elastica che sollecita la molla è

$$F_{e\max} = kx_{e\max} = \frac{k}{m} mx_{e\max} = m(\omega_o^2 S_x) = mS_a$$

Avendo definito

$$40) S_a = \omega_o^2 x_{e\max} = \omega_o^2 S_x$$

$S_a$  si chiama spettro di risposta in accelerazione ed è fornito dalle normative. Al pari di  $S_x$  dipende solo da  $\omega_o$  e  $\xi$ . La figura seguente mostra un esempio di spettro con valori espressi in g che viene denominato spettro di progetto. E' lo spettro  $S_a$  aggiustato con appropriati fattori. I valori sono funzione del periodo proprio del sistema oscillate  $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$ . Si vede come i valori aumentano all'aumentare della frequenza naturale del sistema, perché il sistema diventa sempre più rigido ed in grado di trasferire alla massa le accelerazioni del terreno.

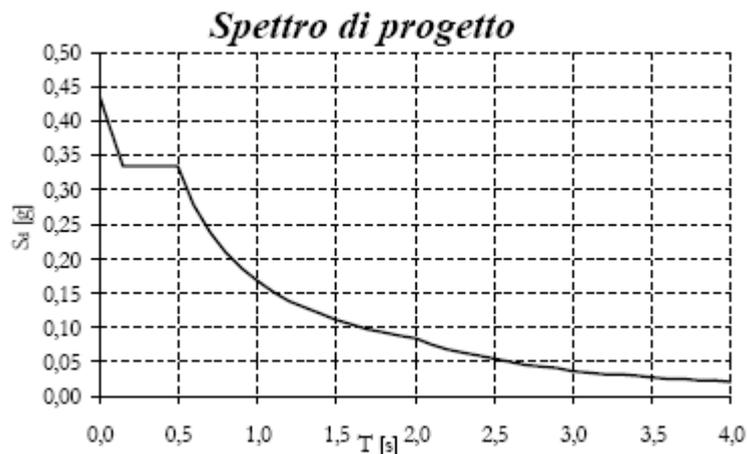
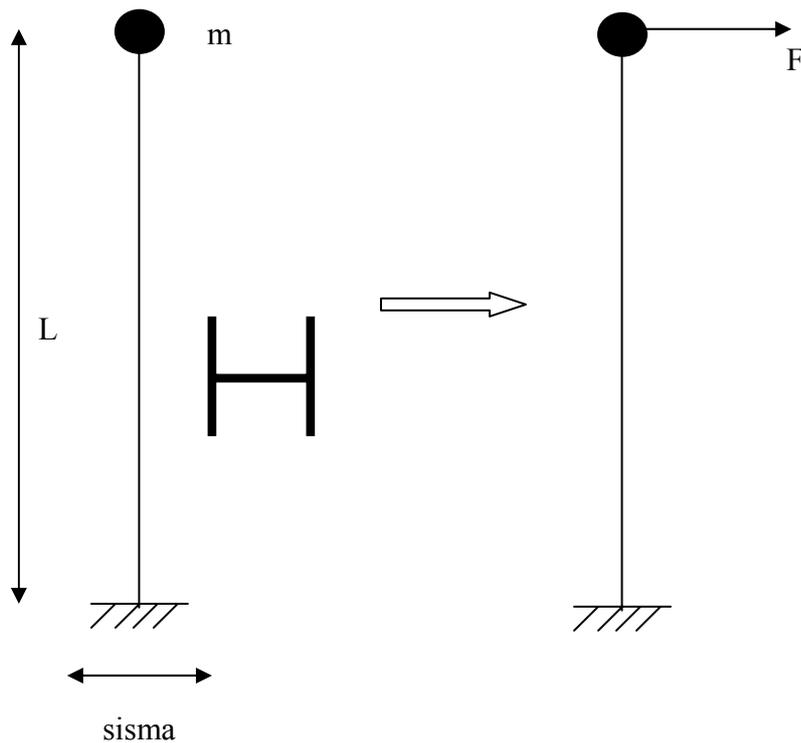


Figura 14: Spettro di progetto sismico per sisma orizzontale

$S_a$  è una specie di accelerazione fittizia che moltiplicata per la massa mi fornisce la forza elastica massima applicata alla molla.

Ai fini del dimensionamento della molla, dal valore dello spettro della normativa  $S_a$ , basta applicare alla struttura una forza  $mS_a$  oppure uno spostamento  $S_x$ .

Vediamo un semplice esempio



**Figura 15:esempio di verifica sismica**

La semplice struttura è una trave HEB360 della sezione indicata che subisce un sisma orizzontale i cui valori di spettro sono dati in figura 14. Questa struttura porta una massa alla sommità talmente elevata che ci consente di trascurare la massa della trave.

Le caratteristiche della struttura sono

$m=10000 \text{ kg}$   
 $L=5000 \text{ mm}$   
 $J=4.32e8 \text{ mm}^4$   
 $W=2.4e6 \text{ mm}^3$   
 $E=210000 \text{ MPa}$

Ricaviamo

$$k = \frac{3EJ}{L^3} = 2200 \frac{N}{mm} \rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = 14.8 \frac{rad}{s} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 0.42 \text{ s}$$

Per il periodo trovato troviamo dalla figura 14  $S_a = 0.34 * 9.81 = 3.34 \text{ m/s}^2$

Che fornisce una forza

$$F = mS_a = 33400 \text{ N}$$

Questa forza produce una sollecitazione di flessione all'incastro

$$\sigma = \frac{FL}{W} = 70 \text{ MPa}$$

Vediamo ora come si possano applicare questi concetti ad un sistema a molti gradi di libertà.

Il punto di partenza è l'equazione 35) del paragrafo 6.1 che ripetiamo

$$35) \begin{bmatrix} I \\ \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} 2\xi\omega_o \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \omega_o^2 \{q\} = -[\varphi]_L^T [[m]_{LB} + [m]_{LL}[\varphi]_C] \{\ddot{x}\}_B = [\gamma] \{\ddot{x}\}_B$$

$$\{\bar{x}\} \cong [\varphi]_L \{q\}$$

Che costituisce il sistema risolvete disaccoppiato per  $\{\bar{x}\}$ , essendo  $\{\bar{x}\}$  gli spostamenti del sistema coi gradi di libertà B bloccati.

Vediamo di ragionare su questa equazione, nell'ipotesi di valutare le azioni sismiche orizzontali su una struttura del tipo in figura.

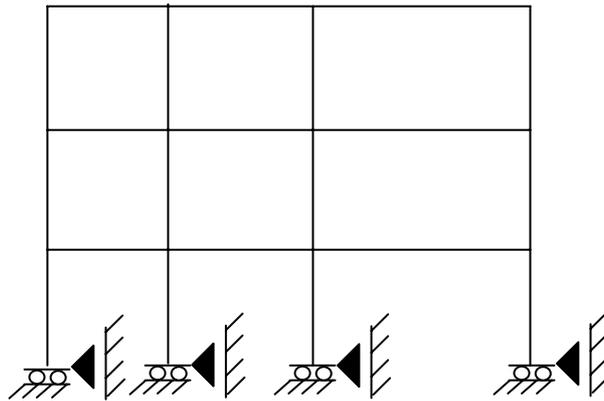


Figura 16: esempio di struttura complessa con sisma

Questo telaio potrebbe rappresentare un palazzo a più piani. Subisce un sisma in direzione orizzontale caratterizzato dall'accelerazione  $\ddot{x}$ . Le colonne sono in realtà tutte incastrate alla base. Facciamo un modello agli elementi finiti della intera struttura le cui matrici la descriveranno libera nel piano. Da queste matrici eliminiamo le righe e le colonne corrispondenti ai gradi di libertà verticali della base delle colonne ed alle rotazioni della base delle colonne. Le matrici descriveranno la struttura che può muoversi orizzontalmente. In pratica abbiamo applicato i vincoli verticali e rotazionali alla base delle colonne indicati in figura.

Le matrici  $[m]$  e  $[k]$  della struttura così vincolata rappresentano il modello di partenza. Questo contiene i gradi di libertà di traslazione orizzontale della base delle colonne che saranno i gradi di libertà B ( $m=4$  è il loro numero). I gradi di libertà rimanenti saranno gli L. La struttura a gradi di libertà B bloccati è quella che ha anche i carrelli neri di figura. Con il sisma tutti e 4 i gradi di libertà B si muovono all'unisono della accelerazione del terreno  $\ddot{x}$  e quindi il vettore delle accelerazioni dei gradi di libertà B si può scrivere

$$\{\ddot{x}\}_B = \{V\} \ddot{x}$$

Dove il vettore  $\{V\}$  è in questo caso un vettore  $4 \times 1$  con tutti i termini unitari.

Questa operazione si può fare sempre nella generalità dei casi.

Partizioniamo le matrici  $[m]$  e  $[k]$  nei gruppi L e B ed in tal modo il sistema 35) diviene

$$\begin{bmatrix} I \\ \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} 2\xi\omega_o \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \omega_o^2 \{q\} = -[\varphi]_L^T [[m]_{LB} + [m]_{LL}[\varphi]_C] \{\ddot{x}\}_B = [\gamma] \{V\} \{\ddot{x}\} = \{\bar{\gamma}\} \{\ddot{x}\}$$

$$\{\bar{x}\} \cong [\varphi]_L \{q\}$$

Notiamo che questa rappresenta un sistema modale con un solo ingresso  $\ddot{x}$  e con uscite pari agli spostamenti  $\{\bar{x}\}$  che sono proprio gli spostamenti elastici dei gradi di libertà L della struttura sottoposta al sisma, ovvero sono gli spostamenti relativi al moto dei gradi libertà B.

I fattori di partecipazione modale sono adesso ridotti ad un vettore  $\{\bar{\gamma}\}$  con tante righe quanti sono i p modi a gradi di libertà B bloccati che abbiamo deciso di usare.

Ogni equazione del sistema modale precedente è

$$\ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_{or} \dot{q}_r + \omega_{or}^2 q_r = \bar{\gamma}_r \ddot{x} \quad r = 1, 2, \dots, p$$

Che assomiglia all'equazione a) dell'inizio di questo paragrafo e quindi

$$q_{r \max} = \bar{\gamma}_r S_{xr} = \bar{\gamma}_r \frac{S_{ar}}{\omega_{or}^2}$$

Dove  $S_{ar}$  è lo spettro di risposta corrispondente al nostro sistema r-esimo deducibile dalla figura 14. A questo valore della  $q_{r \max}$ , se fosse attivo solo questo modo r, corrispondono spostamenti fisici

$$41) \quad \{\bar{x}\}_r = \{\varphi\}_r q_{r \max} = \{\varphi\}_r \bar{\gamma}_r \frac{S_{ar}}{\omega_{or}^2}$$

Possiamo applicare questi spostamenti facilmente calcolati come sopra al sistema a nodi B bloccati per vedere l'effetto del sisma dovuto al modo r.

In maniera alternativa possiamo applicare al sistema a nodi bloccati le forze equivalenti

$$42) \quad \{f\}_{Lr} = [k]_{LL} \{\bar{x}\}_r = [k]_{LL} \{\varphi\}_r \bar{\gamma}_r \frac{S_{ar}}{\omega_{or}^2}$$

Moltiplicando la 42) per la trasposta della forma modale

$$\{\varphi\}_r^T \{f\}_{Lr} = \{\varphi\}_r^T [k]_{LL} \{\varphi\}_r \bar{\gamma}_r \frac{S_{ar}}{\omega_{or}^2} = \bar{\gamma}_r S_{ar} = \{\varphi\}_r^T [m]_{LL} \{\varphi\}_r \bar{\gamma}_r S_{ar}$$

Da cui

$$42') \quad \{f\}_{Lr} = [m]_{LL} \{\varphi\}_r \bar{\gamma}_r S_{ar}$$

Che è un modo alternativo, spesso più comodo, per calcolare le forze equivalenti.

In definitiva l'analisi del sisma si riduce a tante analisi statiche quanti sono i p modi considerati effettuate sulla struttura a nodi bloccati imponendo gli spostamenti 41) oppure le forze equivalenti 42) e poi applicando la sovrapposizione degli effetti sommando i risultati di queste analisi.

Un criterio per valutare se un modo produce effetti significativi è valutare la quantità

$$\frac{\bar{\gamma}_r^2}{M_{tot}}$$

Che esprime la frazione di massa della struttura che partecipa al movimento per il modo r, essendo  $M_{tot}$  la massa totale della struttura.

## 7. STATI DEL SISTEMA

Ogni equazione o sistema di equazioni differenziali può essere scritto in una forma canonica, normalmente utilizzata per ottenere soluzioni numeriche. Anche Matlab fa uso di questa scrittura per descrivere le equazioni del sistema. Si tratta della forma cosiddetta 'state space'. Vediamo di cosa si tratta, a partire ovviamente da un sistema ad un grado di libertà.

L'equazione

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

Può essere scritta come

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = -\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{1}{m}f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{cases} x \\ \dot{x} \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f$$

$$\text{ovvero } \{\dot{z}\} = [A]\{z\} + [B]\{u\}$$

Ovvero scriviamo un sistema di 2 equazioni differenziali del primo ordine anziché una equazione differenziale del secondo ordine.

Il vettore  $\{z\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}$  è detto vettore degli stati del sistema e contiene in sequenza lo spostamento e la velocità. La matrice [A] contiene tutte e solo le proprietà del sistema e quindi deve godere di proprietà particolari:

infatti gli autovalori di [A] sono i poli della funzione di trasferimento  $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$ . (ricordiamo che gli autovalori  $\lambda$  si trovano da  $\det[[A] - \lambda[I]] = 0$ ).

Essendo gli autovalori invarianti rispetto ad una trasformazione lineare, ne deriva che gli stati del sistema non sono necessariamente quelli da noi scelti in questo caso, ma anche una qualsiasi loro combinazione lineare definita dalla matrice [T] di trasformazione

$$\{z\}_1 = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad \{z\}_1 = [T]\{z\}_2$$

Ne consegue che le scritture

$$\{\dot{z}\}_1 = [A]_1\{z\}_1 + [B]_1\{u\} \Leftrightarrow \{\dot{z}\}_2 = [T]^T[A]_1[T]\{z\}_2 + [T]^T[B]_1\{u\} \rightarrow \{\dot{z}\}_2 = [A]_2\{z\}_2 + [B]_2\{u\}$$

Rappresentano lo stesso sistema con stati diversi.

Vista la circostanza che gli stati possano quindi non essere direttamente la risposta del sistema, è utile anche associare alla equazione differenziale una equazione algebrica che lega gli stati all'uscita che ci interessa, quindi il sistema 'state space' completo prende la forma

$$43) \quad \begin{cases} \{\dot{z}\} = [A]\{z\} + [B]\{u\} \\ \{y\} = [C]\{z\} + [D]\{u\} \end{cases}$$

In cui la prima equazione differenziale consente di ottenere gli stati dagli ingressi del sistema (forzanti)  $\{u\}$ , mentre la seconda equazione algebrica consente di ottenere le uscite (risposte) che vogliamo  $\{y\}$  che, in generale, dipendono sia dagli stati che dagli ingressi.

Nel caso del sistema ad un grado di libertà con ingresso la forza  $f$  ed uscita lo spostamento  $x$  abbiamo

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f \\ x = [1 \quad 0] \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Quindi  $[C]=[1 \ 0]$  e  $[D]=0$ .

Se vogliamo come uscita la velocità avremmo  $[C]=[0 \ 1]$  e  $[D]=0$ , mentre se vogliamo avere come uscita l'accelerazione

$$[C] = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$$

La matrice  $[D]$  è diversa dalla matrice nulla quando vogliamo in uscita grandezze proporzionali all'accelerazione.

Naturalmente la forma 43) delle equazioni state space può essere agevolmente applicata a sistemi con più gradi di libertà.

L'equazione 8) del sistema ad  $n$  GDL

$$8) \quad \begin{matrix} (n,n)(n,1) & (n,n)(n,1) & (n,n)(n,1) & (n,1) \\ [m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{f\} \end{matrix}$$

Definiti gli stati come

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} \text{ porta a}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[m]^{-1}[k] & -[m]^{-1}[c] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} [0] \\ [m]^{-1} \end{bmatrix}$$

Le matrici  $[C]$  e  $[D]$  sono definite in base alle uscite che vogliamo. Se vogliamo conoscere gli spostamenti avremo

$$[C] = [[I] \quad [0]] \quad [D] = [0]$$

Per il sistema 8'') in forma modale

$$\begin{matrix} (m,m)(m,1) & (m,m) & (m,1) & (m,m) & (m,1) & (m,1) & (m,1) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \cdot \cdot \cdot 2\xi\omega_o \cdot \cdot \cdot \end{bmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} \cdot \cdot \cdot \omega_o^2 \cdot \cdot \cdot \end{bmatrix} \{q\} = [\varphi]^T \{f\} = \{t\}$$

8'')

$$\begin{matrix} (n,1) & (n,m)(m,1) \end{matrix}$$

$$\{x\} \cong [\varphi] \{q\}$$

Presi gli stati  $\{z\} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix}$  si ha

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\cdot \cdot \cdot \omega_o^2 \cdot \cdot \cdot] & -[\cdot \cdot \cdot 2\xi\omega_o \cdot \cdot \cdot] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} [0] \\ [\varphi]^T \end{bmatrix}$$

E se vogliamo in uscita gli spostamenti

$$[C] = [[\varphi] \quad [0]] \quad [D] = [0]$$

Il sistema con queste matrici ha come ingressi le  $n$  forze applicabili al sistema e come uscite gli  $n$  spostamenti dei gradi di libertà del sistema. Molto spesso prevediamo di applicare solo  $p$  delle  $n$  possibili forze e ci interessa conoscere solo  $s$  degli  $n$  possibili spostamenti.

In tal caso possiamo definire delle matrici tali che

$$n,1 \quad n,p \quad p,1 \quad s,1 \quad s,n \quad n,1$$

$$\{f\} = [U]_p \{f\}_p \quad \{x\}_s = [V]_s \{x\}$$

Per cui

$$\begin{cases} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{cases} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\omega_o^2] & -[2\xi\omega_o] \end{bmatrix} \begin{cases} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{cases} + \begin{bmatrix} [0] \\ [\gamma] \end{bmatrix} \{f\}_p$$

$$\{x\}_s = [[\varphi]_s \quad [0]] \begin{cases} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{cases}$$

In cui

$$[\varphi]_s = [V]_s [\varphi] \quad [\gamma] = [\varphi]^T [U]_p$$

Il sistema avrà  $p$  ingressi,  $s$  uscite e  $2m$  stati dove  $m$  è il numero di modi considerati nel troncamento modale.