

RECIPIENTI IN PRESSIONE

7.1 RECIPIENTI SOTTILI IN PRESSIONE.

In un tubo di raggio interno r e spessore t , con pressione interna p , se lo spessore è piccolo rispetto al raggio di curvatura e non vi sono discontinuità, come brusche piegature, le tensioni si possono calcolare con buona approssimazione trascurando la flessione della parete del serbatoio, supponendo cioè che le tensioni di trazione sulle pareti siano costanti attraverso lo spessore in direzione circonferenziale.

Per l'equilibrio (Fig. 7.1) si ha (p essendo la pressione e σ_c la sollecitazione circonferenziale):

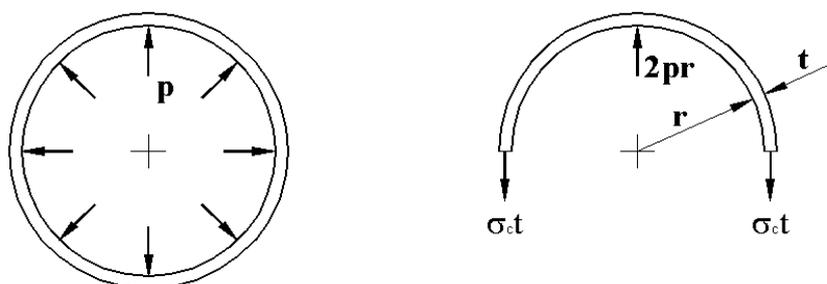


Fig. 7.1 – Recipiente in pressione di piccolo spessore: sezione trasversale

$$\sigma_c = \frac{pr}{t} \quad (7.1)$$

Nella parte cilindrica dei recipienti in pressione oltre alla sollecitazione circonferenziale si ha anche la sollecitazione assiale:

$$\sigma_a = \frac{pr}{2t} \quad (7.2)$$

che si ricava facilmente con sole considerazioni di equilibrio, tenendo conto della pressione che si esercita sui fondi di chiusura (Fig. 7.2).

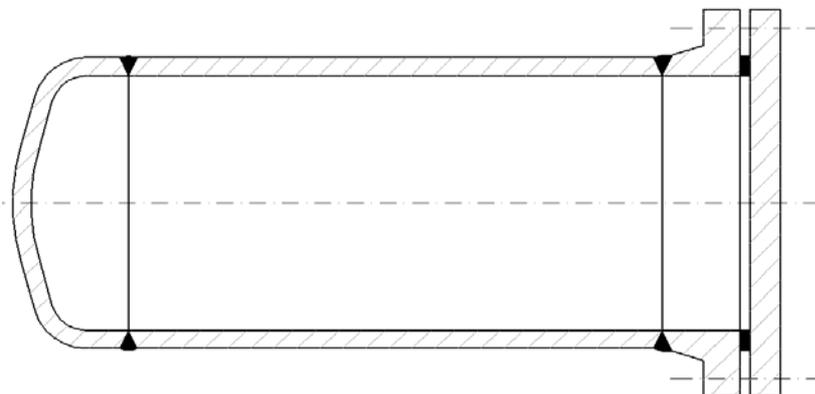


Fig. 7.2 – Recipiente in pressione di piccolo spessore: sezione longitudinale

Per il recipiente di Fig. 7.2, indicando con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ le tre sollecitazioni principali, si ha (trascurando la pressione rispetto alle tensioni circonferenziale ed assiale):

$$\sigma_1 = \sigma_c = \frac{pr}{t} \quad (7.3)$$

$$\sigma_2 = \sigma_a = \frac{pr}{2t} \quad (7.4)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (7.5)$$

la sollecitazione di taglio massimo risulta:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pr}{2t} \quad (7.6)$$

e la pressione massima di lavoro, quando si usi la teoria di resistenza del taglio massimo:

$$p \leq \frac{2t \tau_{amm}}{r} \dots ovvero p \leq \frac{t \sigma_{amm}}{r} \quad (7.7)$$

avendo indicato con τ_{amm} e con σ_{amm} rispettivamente le sollecitazioni ammissibili di taglio e normale.

Per i recipienti in pressione le sollecitazioni ammissibili sono imposte normalmente da appositi regolamenti. Il Boiler & Pressure Vessel Code dell'ASME prevede, nel caso si utilizzino i comuni acciai da costruzione, che la tensione ammissibile sia la minore tra:

- 1/4 della tensione di rottura a trazione a temperatura ambiente;
- 5/8 della tensione di snervamento a trazione a temperatura ambiente;
- 1/4 della tensione di rottura a trazione alla temperatura di lavoro;
- 5/8 della tensione di snervamento a trazione alla temperatura di lavoro;
- la tensione che produce l'1% di creep in 100000 ore alla temperatura di lavoro;
- l'80% della tensione che provoca rottura al termine delle 100000 ore alla temperatura di lavoro.

Per gli acciai ad alta resistenza, in cui la tensione di snervamento si avvicina a quella di rottura, i criteri sopra esposti divengono troppo conservativi. Per i recipienti che lavorano a temperatura ambiente, ci si può riferire alla sola tensione di snervamento in quanto parametro che meglio "controlla" il cedimento del recipiente. In tali casi si è soliti utilizzare un coefficiente di sicurezza pari a 1.5.

Nelle zone del cilindro prossime ai fondi (Fig. 7.2), allo stato di tensione trovato, con tensioni costanti attraverso lo spessore, ovvero di tipo membranale, si sommano tensioni di perturbazione provocate dalla presenza dei fondi stessi (o delle chiusure flangiate). Le sollecitazioni nei fondi dipendono evidentemente dalla forma di questi.

Nei fondi sferici si ha ad esempio uno stato di sollecitazione biassiale con tensioni principali σ_1 e σ_2 , avendo indicato con t lo spessore e con r il raggio:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (7.8)$$

Se il recipiente è soggetto a pressione esterna valgono ancora le formule precedenti in cui sia r il raggio esterno ed in cui si cambi il segno alle pressioni: con ciò le sollecitazioni risultano di compressione. La verifica in questo caso va naturalmente completata con il calcolo della pressione critica per la quale si hanno cedimenti per instabilità dell'equilibrio elastico.

7.1.1 ESEMPIO 1

Si progetti un recipiente soggetto ad una pressione interna costante di 150 bar e che lavora a temperatura ambiente. Si supponga che il suo raggio interno sia $r_i = 200$ e il materiale scelto abbia $\sigma_{sn} = 600$ MPa.

La tensione ammissibile si calcola dividendo la tensione di snervamento per il coefficiente di sicurezza:

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_{sn}}{c_s} = \frac{600 \text{ MPa}}{1.5} = 400 \text{ MPa}$$

Dalla (7.7), essendo noti gli altri termini, si ricava lo spessore t :

$$t \geq \frac{pr}{\sigma_{amm}} = \frac{15 \text{ N/mm}^2 \cdot 200 \text{ mm}}{400 \text{ N/mm}^2} = 7.5 \text{ mm}$$

7.2 RECIPIENTI CILINDRICI DI GROSSO SPESSORE.

Nei cilindri cavi in pressione di grosso spessore non si può ammettere il comportamento membranale e deve essere considerata la variazione della tensione circonferenziale σ_c lungo il raggio; inoltre non

si possono trascurare le sollecitazioni radiali σ_r (nel caso in cui la pressione agisca internamente, in corrispondenza del raggio interno si ha $\sigma_r = -p$ e di quello esterno $\sigma_r = 0$)

Si isoli in un cilindro indefinito (Fig. 7.3), soggetto a pressione interna, un disco di lunghezza unitaria e in questo a sua volta si isoli un semianello di spessore infinitesimo in direzione radiale, ottenuto eseguendo tagli con un piano diametrale e con due superfici cilindriche coassiale al cilindro cavo stesso. Con i simboli di Fig. 7.3, per l'equilibrio in direzione perpendicolare al piano diametrale che delimita il semianello, si ha (tenendo conto che per evidenti ragioni sia la tensione σ_c , sia la σ_r , sono funzioni solo del raggio e sono principali):

$$2d\sigma_c + 2r\sigma_r - 2(r+dr)(\sigma_r + d\sigma_r) = 0 \quad (7.9)$$

Da cui trascurando gli infinitesimi di ordine superiore:

$$\sigma_c - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (7.10)$$

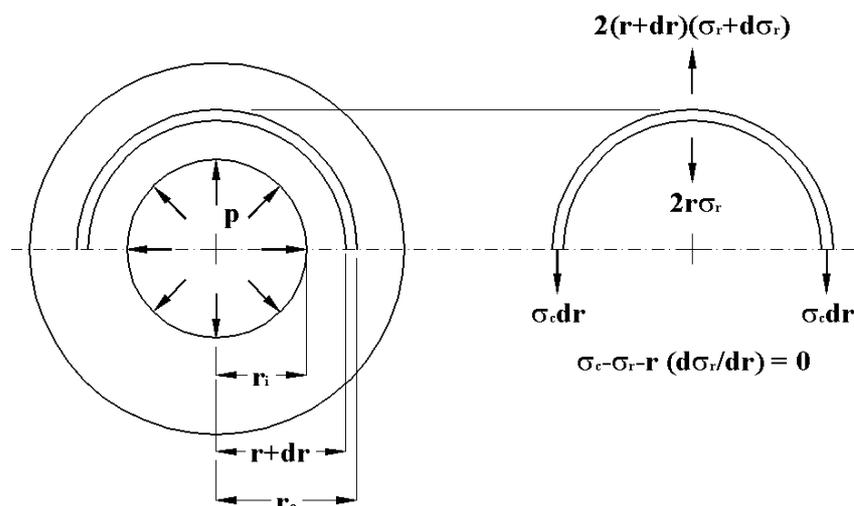


Fig. 7.3 – Cilindro di grande spessore con pressione agente all'interno

Tale equazione non è da sola sufficiente a determinare lo stato di tensione. Devono essere prese in considerazione anche le deformazioni. In particolare si può assumere che le deformazioni assiali siano uguali per qualsiasi valore del raggio $\varepsilon_a(r) = \varepsilon_a$ (stato di deformazione piano).

Ciò porta a concludere che la deformazione è simmetrica rispetto all'asse del cilindro e diretta radialmente. Pertanto, indicando con $u(r)$ lo spostamento radiale subito, dopo l'applicazione della pressione interna, dai punti posti al raggio r e con $\varepsilon_r(r)$ ed $\varepsilon_c(r)$ rispettivamente la deformazione unitaria radiale e circonferenziale, si ha, per la definizione di deformazione unitaria:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (7.11)$$

e, con semplici considerazioni relative alla dilatazione della fibre circolari di raggio r :

$$\varepsilon_c = \frac{u}{r} \quad (7.12)$$

Utilizzando le relazioni fra deformazioni unitarie e sollecitazioni valide in campo elastico (con E modulo elastico e ν coefficiente di Poisson):

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_c) \quad (7.13)$$

$$\sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_c + \nu \varepsilon_r) \quad (7.14)$$

sostituendo in esse la (7.11) e la (7.12), si ha:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \quad (7.15)$$

$$\sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (7.16)$$

e derivando la (7.15):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2u}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \nu \frac{u}{r^2} \right) \quad (7.17)$$

Sostituendo le (7.15-7.17) nella (7.10) si ottiene infine l'equazione differenziale seguente per la funzione $u(r)$:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (7.18)$$

che insieme alle condizioni al contorno permette di risolvere il problema. L'integrale generale dell'equazione (7.18) è il seguente (con A e B costanti):

$$u = Ar + \frac{B}{r} \quad (7.19)$$

da cui derivando:

$$\frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2} \quad (7.20)$$

Sostituendo le (7.19) e (7.20) nelle (7.15) e (7.16) si ottiene:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[A(1+\nu) - \frac{B}{r^2}(1-\nu) \right] \quad (7.21)$$

$$\sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} \left[A(1+\nu) + \frac{B}{r^2}(1-\nu) \right] \quad (7.22)$$

e con le condizioni al contorno (r_i ed r_e indicando i raggi interno ed esterno del cilindro):

$$\sigma_r(r_i) = -p \quad (7.23)$$

$$\sigma_r(r_e) = 0 \quad (7.24)$$

si ha:

$$-\frac{p}{E}(1-\nu^2) = A(1+\nu) - \frac{B}{r_i^2}(1-\nu) \quad (7.25)$$

$$0 = A(1+\nu) - \frac{B}{r_e^2}(1-\nu) \quad (7.26)$$

da cui:

$$A = \frac{1-\nu}{E} p \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad (7.27)$$

$$B = \frac{1+\nu}{E} p \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} r_e^2 \quad (7.28)$$

Introducendo le espressioni (7.27) e (7.28) nelle (7.21) e (7.22) si hanno infine le formule di Lamè per le sollecitazioni radiale e circonferenziale:

$$\sigma_r = p \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad (7.29)$$

$$\sigma_c = p \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad (7.30)$$

La tensione circonferenziale risulta ovunque positiva e massima al raggio interno; quella radiale ovunque negativa e minima al raggio interno.

Se il cilindro costituisce la parte centrale di un recipiente è presente, a sufficiente distanza dalla chiusure, anche la sollecitazione assiale costante:

$$\sigma_a = p \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad (7.31)$$

Dalle (7.29-7.31) si deduce facilmente che la tensione assiale è sempre intermedia fra quella circonferenziale e quella radiale; la sollecitazione di confronto secondo la teoria di resistenza del taglio massimo vale allora sia per il cilindro indefinito che per il recipiente

$$\sigma = \sigma_c - \sigma_r = 2p \frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2} \quad (7.32)$$

ed è massima per $r = r_i$

La tensione espressa dalla (7.32) non deve superare quella ammissibile per il materiale.

Se i dati di progetto sono il raggio interno r_i , la pressione interna p e la sollecitazione ammissibile σ_{amm} con la (7.32) si può determinare il raggio esterno e quindi lo spessore del recipiente. Uguagliando la sollecitazione di confronto in corrispondenza del raggio interno si ha:

$$\sigma_{amm} = 2p \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad (7.33)$$

e risolvendo la (7.33) rispetto a r_e :

$$r_e = r_i \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \frac{p}{\sigma_{amm}}}} \quad (7.34)$$

Si vede che al tendere di p a $\sigma_{amm}/2$ lo spessore del recipiente tende all'infinito. La Fig. 7.4 riporta lo spessore, espresso in forma adimensionale in funzione del rapporto adimensionale p/σ_{amm} .

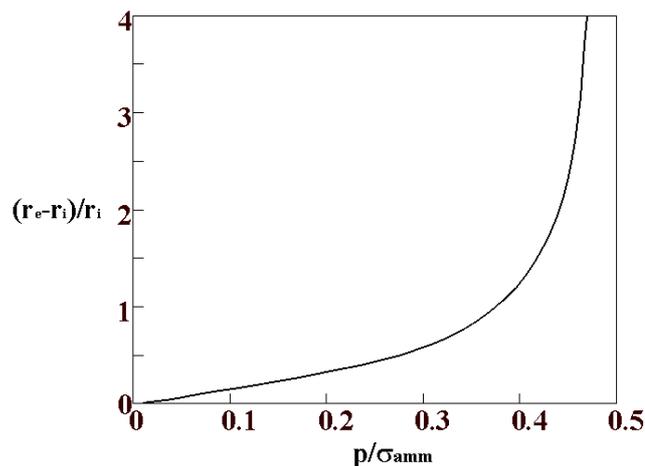


Fig. 7.4 – Andamento dello spessore in funzione della pressione agente

Nella Fig. 7.5 sono rappresentate in forma adimensionale (moltiplicate per il fattore $[(r_e^2 - r_i^2)/r_i^2]/p$) le sollecitazioni in funzione del raggio, per cilindro con $1 \geq r_i/r_e \geq 0.25$.

Per mezzo dei diagrammi in Fig. 7.5 è anche possibile valutare l'errore che si fa con l'ipotesi dello stato membranale, normalmente adottata per i recipienti sottili.

Quando la pressione agisce all'esterno invece che all'interno del recipiente vale la trattazioni precedente fino alla (7.22) inclusa. Le condizioni al contorno sono in tale caso:

$$\sigma_r(r_i) = 0 \quad (7.35)$$

$$\sigma_r(r_e) = -p \quad (7.36)$$

e proseguendo in modo analogo a prima si trovano le formule seguenti per le sollecitazioni

$$\sigma_r = -p \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \quad (7.37)$$

$$\sigma_c = -p \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \quad (7.38)$$

$$\sigma_a = -p \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad (7.39)$$

$$\sigma = \sigma_c - \sigma_r = -2p \frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2} \quad (7.40)$$

La tensione ideale massima risulta uguale in valore assoluto a parità di pressione, quando questa sia esterna anziché interna.

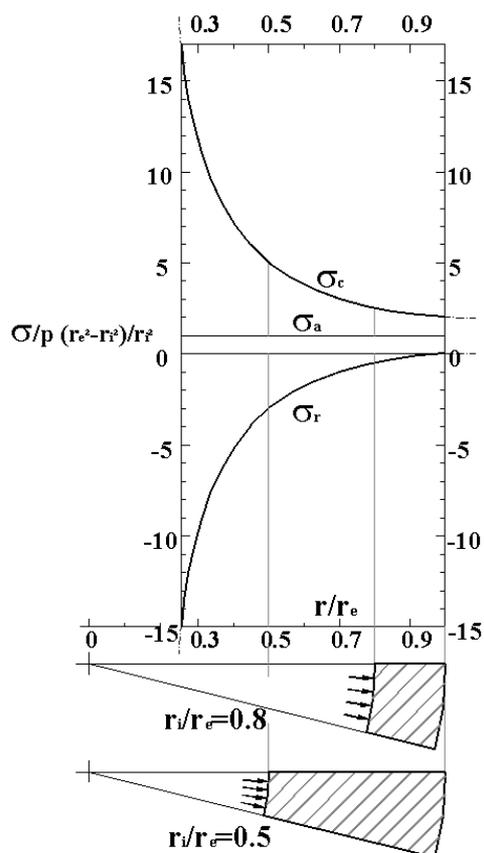


Fig. 7.5 – Sollecitazioni in un recipiente cilindrico di grosso spessore soggetto a pressione interna

Per cilindri o recipienti sottoposti contemporaneamente a pressione interna ed esterna, si può evidentemente ricavare lo stato di tensione applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

La Fig. 7.6 è analoga alla Fig. 7.5, ma serve per il caso di pressione esterna.

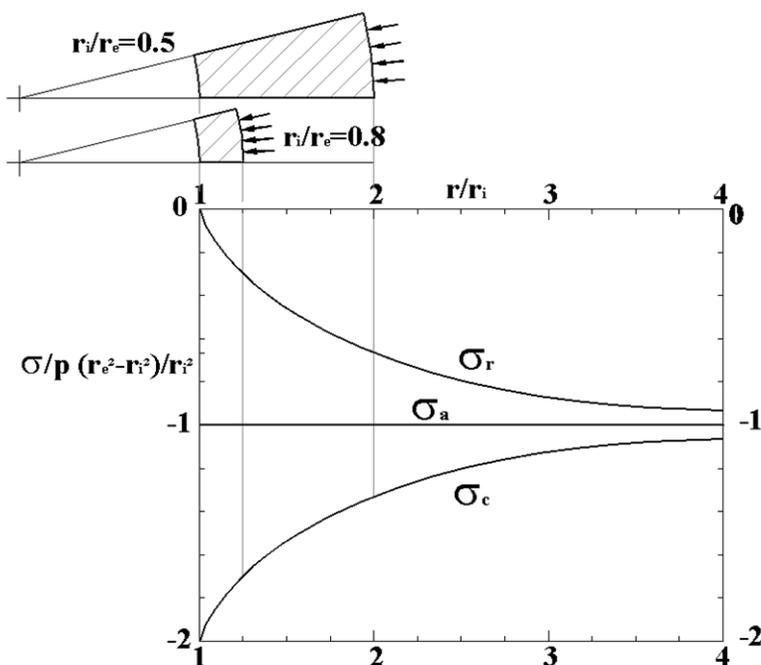


Fig. 7.6 – Sollecitazioni in un recipiente cilindrico di grosso spessore soggetto a pressione esterna

7.2.1 ESEMPIO 2

Si ripeta l'esercizio dell'esempio 1, supponendo che la pressione di esercizio sia di 1500 bar.

Utilizzando la (7.34) si ottiene:

$$r_e = r_i \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \frac{p}{\sigma_{amm}}}} = 200mm \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \frac{150N/mm^2}{400N/mm^2}}} = 400mm$$

Ovvero lo spessore del recipiente dovrà essere di 100 mm. Se si fosse ipotizzato il recipiente di piccolo spessore, dalla (7.7) si sarebbe ottenuto:

$$t \geq \frac{pr}{\sigma_{amm}} = \frac{150N/mm^2 \cdot 200mm}{400N/mm^2} = 75mm$$

sottostimando del 25% lo spessore necessario.

Se viceversa si considerano i dati dell'esercizio riportato nell'esempio 1 e si adotta in quel caso l'ipotesi di recipiente di grosso spessore dalla (7.34) si ottiene:

$$r_e = r_i \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \frac{p}{\sigma_{amm}}}} = 200mm \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \frac{15N/mm^2}{400N/mm^2}}} = 207.95mm$$

In questo caso lo spessore dovrebbe quindi risultare 7.95 mm, solo di poco maggiore di quanto stimato ipotizzando un recipiente di piccolo spessore.

7.3 CILINDRI FORZATI.

Quando la pressione interna è molto alta conviene sostituire un cilindro di grosso spessore con un cilindro composto ottenuto forzando uno entro l'altro una serie di cilindri.

Si consideri il caso di Fig. 7.7 di due cilindri montati con una interferenza Δ (riferita al raggio); il cilindro interno si comporta come un cilindro soggetto a pressione esterna e quello esterno come un cilindro soggetto a pressione interna.

La (7.19), sostituendo i valori delle costanti A e B fornisce le seguenti espressioni dello spostamento radiale

$$u'(r) = \frac{p}{E} \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1-\nu)r_i^2 r + (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r} \right] \quad (7.41)$$

$$u''(r) = -\frac{p}{E} \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1-\nu)r_e^2 r + (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r} \right] \quad (7.42)$$

rispettivamente per pressione interna ed esterna per un cilindro di raggi esterno ed interno pari ad r_e ed r_i rispettivamente.

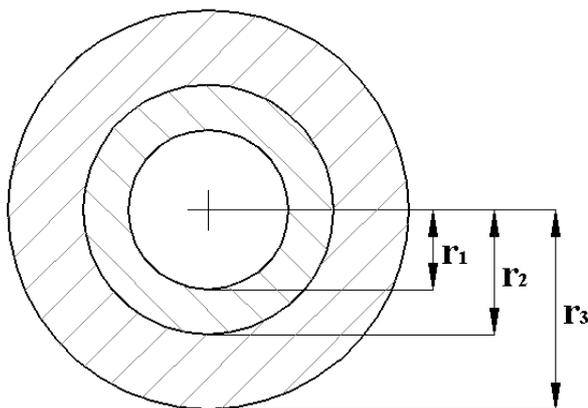


Fig. 7.7 - Cilindri forzati

A seguito del montaggio (eseguito di solito previo riscaldamento del cilindro esterno) si genera sulla superficie cilindrica di contatto di raggio r_2 (Fig. 7.7) una pressione tra i due cilindri componenti, che si calcola imponendo la congruenza, ovvero imponendo che la interferenza Δ sia uguale alla diminuzione del raggio esterno del cilindro interno più l'aumento del raggio interno del cilindro esterno. Si ha:

$$\Delta = -u''(r_2) + u'(r_2) \quad (7.43)$$

ovvero tenendo conto delle (7.41) E (7.42), indicando con p_Δ la pressione nel contatto,

$$\Delta = \frac{P_{\Delta}}{E} r_2^2 \frac{1}{(r_2^2 - r_1^2)(r_3^2 - r_2^2)} r_2 (r_3^2 - r_1^2) \quad (7.44)$$

da cui si ricava la pressione

$$P_{\Delta} = \frac{\Delta E}{2r_2^3} \frac{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_3^2 - r_2^2)}{r_3^2 - r_1^2} \quad (7.45)$$

Applicando a questo punto le (7.29-7.30 e le (7.37-7.40) si possono ricavare le sollecitazioni, il cui andamento è indicato nella Fig. 7.8a. Se ora si immagina di assoggettare il cilindro composto ad una pressione interna, le sollecitazioni risultanti si ricavano come somma di quelle dovute al forzamento e quelle dovute alla pressione interna per il cilindro completo di raggio interno ed esterno r_1 ed r_3 . Risulta la situazione indicata in Fig. 7.8b.

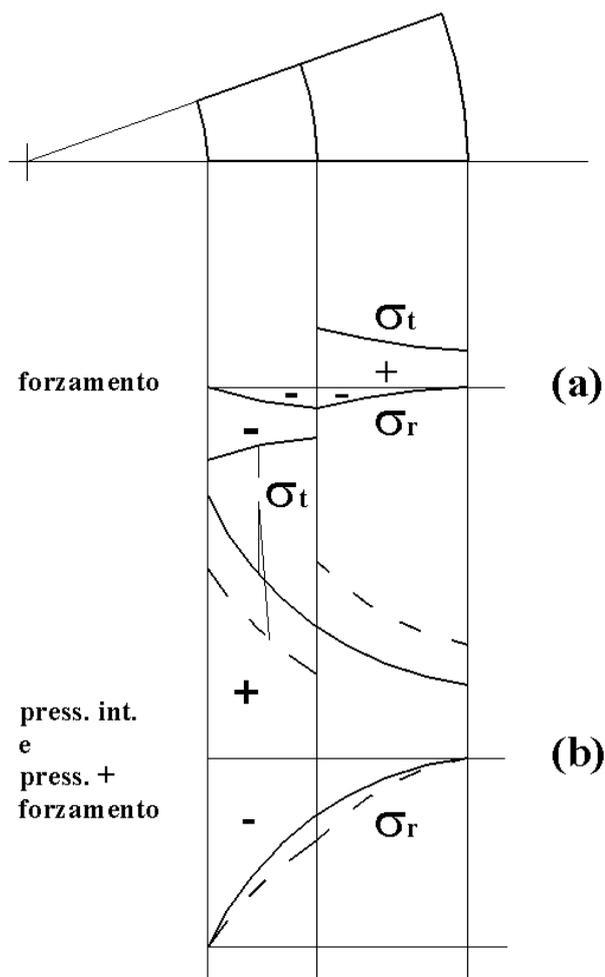


Fig. 7.8 - Tensioni nei cilindri forzati

Si ha la situazione ottima (sollecitazione ideale massima = minima) quando si assegna una interferenza tale da rendere uguali le sollecitazioni ideali in corrispondenza dei raggi interni dei due cilindri componenti, come si può dimostrare. Si dimostra inoltre che a parità di diametro interno e di sollecitazione ammissibile, il minimo diametro esterno $2r_3$ del recipiente completo, ovvero il minimo peso, si ottiene quando i cilindri componenti sono geometricamente simili ($r_2/r_1 = r_3/r_2$) ed assegnando l'interferenza che, per la pressione interna

assegnata, dà luogo a uguali sollecitazioni in corrispondenza del diametro interno dei due cilindri componenti.

Vantaggi superiori si hanno aumentando il numero di cilindri forzati uno dentro l'altro (cilindri multistrati).

Il principio dei cilindri forzati ha trovato già in passato e trova oggi largo impiego in molte costruzioni meccaniche (canne da fuoco, cilindri di compressori per altissime pressioni, recipienti in pressione).

Un modo alternativo per limitare lo spessore di un cilindro soggetto a grande pressione interna è quello di far precedere il servizio da una prova in sovrappressione tale da provocare lo snervamento per trazione al bordo interno. Eliminando la pressione interna rimane nel cilindro uno stato di coazione di compressione nella zona interna, equilibrato da una trazione in quella esterna che sommandosi alla sollecitazione provocata dalla pressione di servizio determina una situazione tensionale favorevole.

7.3.1 ESEMPIO 3

Si progetti un recipiente soggetto ad una pressione costante di 1500 bar. Il suo raggio interno sia $r_i = 100$ e il materiale scelto abbia $\sigma_{sn} = 600$ MPa.

La tensione ammissibile può calcolarsi come $\sigma_{sn}/1.5$. Si ottiene

$$\sigma_{am} = 400 \text{ MPa}$$

Come prima ipotesi si consideri un recipiente semplice a pressione. In questo caso dalla (7.34) si ottiene:

$$r_e = r_i \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \frac{p}{\sigma_{amm}}}} = 100 \text{ mm} \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \frac{150 \text{ N/mm}^2}{400 \text{ N/mm}^2}}} = 200 \text{ mm}$$

Si ipotizzi invece di voler utilizzare un recipiente costituito da due cilindri forzati e si determini, ipotizzando che il materiale resti lo stesso, di quanto si può ridurre il raggio esterno.

Si procede per tentativi fissando $r_3 = r_e = 170$ mm (Fig. 7.7). In base all'ipotesi che il minimo peso si ottiene quando i cilindri componenti sono geometricamente simili ($r_2/r_1 = r_3/r_2$), possiamo calcolare r_2 :

$$r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3} = \sqrt{100 \text{ mm} \cdot 170 \text{ mm}} = 130.38 \text{ mm} \rightarrow r_2 = 130 \text{ mm}$$

Inoltre si ipotizza che il forzamento tra i due cilindri sia:

$$\Delta = 0.1 \text{ mm}$$

Con riferimento alla Fig. 7.8, le sezioni in cui verificare il recipiente, sono le due sezioni interne, ovvero $r = r_1$ per il cilindro interno e $r = r_2$ per il cilindro esterno.

Dalla 7.45 possiamo calcolare la pressione agente a $r = r_2$ a causa del forzamento:

$$\begin{aligned} p_{\Delta} &= \frac{\Delta E}{2r_2^3} \frac{(r_2^2 - r_1^2)(r_3^2 - r_2^2)}{(r_3^2 - r_1^2)} = \\ &= \frac{0.1 \text{ mm} \cdot 210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 130^3 \text{ mm}^3} \frac{(130^2 - 100^2)(170^2 - 130^2) \text{ mm}^4}{(170^2 - 100^2) \text{ mm}^2} \cong 21.00 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Per calcolare lo stato di tensione, si farà ricorso al principio di sovrapposizione degli effetti calcolando separatamente l'effetto della pressione interna e del forzamento:

cilindro interno

Calcoliamo dapprima le tensioni dovute alla pressione interna. Dalle (7.21) e (7.22):

$$\sigma_r' = 150 \text{ N/mm}^2 \frac{100^2 \text{ mm}^2}{(170^2 - 100^2) \text{ mm}^2} \left(1 - \frac{170^2}{100^2} \right) = -150 \text{ N/mm}^2 \quad ^1$$

¹ Per l'equilibrio al raggio r_1 si ha ovviamente $\sigma_r = -p$

$$\sigma'_c = 150N/mm^2 \frac{100^2 mm^2}{(170^2 - 100^2)mm^2} \left(1 + \frac{170^2}{100^2}\right) = 309N/mm^2$$

Calcoliamo poi l'effetto del forzamento. Ancora dalle (7.21) e (7.22) ponendo $p = p_\Delta$:

$$\sigma''_r = 0$$

$$\sigma''_c = -21.0N/mm^2 \frac{130^2 mm^2}{(130^2 - 100^2)mm^2} \left(1 + \frac{100^2}{130^2}\right) = -103N/mm^2$$

Pertanto avremo:

$$\sigma_r = \sigma'_r + \sigma''_r = -150 - 0 = -150N/mm^2$$

$$\sigma_c = \sigma'_c + \sigma''_c = 309 - 103 = 206N/mm^2$$

da cui:

$$\sigma_{eq} = \sigma_c + \sigma_r = 206 + 150 = 356N/mm^2$$

cilindro esterno

Calcoliamo dapprima le tensioni dovute alla pressione interna. Dalle (7.21) e (7.22):

$$\sigma'_r = 150N/mm^2 \frac{100^2 mm^2}{(170^2 - 100^2)mm^2} \left(1 - \frac{170^2}{130^2}\right) = -56.4N/mm^2$$

$$\sigma'_c = 150N/mm^2 \frac{100^2 mm^2}{(170^2 - 100^2)mm^2} \left(1 + \frac{170^2}{130^2}\right) = 215N/mm^2$$

Calcoliamo poi l'effetto del forzamento. Ancora dalle (7.21) e (7.22) ponendo $p = p_{\Delta}$:

$$\sigma_r'' = 21.0 N / mm^2 \frac{130^2 mm^2}{(170^2 - 100^2) mm^2} \left(1 - \frac{170^2}{130^2} \right) = -21.0 N / mm^2$$

$$\sigma_c'' = 21.0 N / mm^2 \frac{130^2 mm^2}{(170^2 - 100^2) mm^2} \left(1 + \frac{170^2}{130^2} \right) = 80.2 N / mm^2$$

Pertanto avremo:

$$\sigma_r = \sigma_r' + \sigma_r'' = -56.4 - 21.0 = -77.4 N / mm^2$$

$$\sigma_c = \sigma_c' + \sigma_c'' = 215 + 80.2 = 295 N / mm^2$$

da cui:

$$\sigma_{eq} = \sigma_c + \sigma_r = 295 + 77.4 = 372 N / mm^2$$

Ovvero per entrambi i cilindri è rispettata la condizione $\sigma_{eq} \leq \sigma_{amm}$.

Volendo si potrebbe ipotizzare di partire con un diametro esterno minore, per esempio $r_3 = r_e = 165$ mm, e ripetere il calcolo.

7.4 LEGISLAZIONE E NORMAZIONE DELLE APPARECCHIATURE A PRESSIONE

Il presente paragrafo è dedicato all'esame del quadro legislativo e normativo esistente a livello nazionale ed internazionale in materia di attrezzature a pressione.

Per quanto concerne la normativa italiana il Regio Decreto 12 maggio 1927, n.824, è stato la prima norma di certificazione relativa agli apparecchi a pressione all'interno della quale venivano definite le principali regole da seguire relativamente a:

impiego della ghisa nei recipienti a vapore e calcolo delle parti di apparecchi a pressione;

impiego della saldatura autogena nella costruzione e riparazione di apparecchi a pressione;

costruzione ed esercizio degli apparecchi destinati a generare ed a contenere gas acetilene sotto pressione.

L'evoluzione tecnologica nel campo delle attrezzature a pressione portò ad un primo aggiornamento al R.D. 12/5/1927 N.824 attraverso il D.M. 21 Novembre 1972. All'interno di tale decreto vennero inserite nuove disposizioni in merito al calcolo delle diverse parti degli apparecchi a pressione e dei generatori di vapore d'acqua, oltre che all'impiego dei materiali e delle saldature. L'incarico di sviluppare le normative tecniche applicative del decreto ministeriale venne conferito dal Ministro del Lavoro e della Previdenza Sociale all'Associazione Nazionale per il Controllo della Combustione (ANCC). Furono così realizzate le norme contenute nelle cosiddette "Raccolte", identificate come di seguito:

VSR "Verifica della stabilità dei recipienti a pressione".

VSG "Verifica della stabilità dei generatori di vapore d'acqua".

M "Impiego dei materiali nella costruzione e riparazione degli apparecchi a pressione".

S "Impiego della saldatura nella costruzione e riparazione degli apparecchi a pressione".

L'aggiornamento semestrale delle "raccolte" fu curato dall'ANCC fino al 1978, successivamente questa associazione venne sostituita dall'Istituto Superiore per la Prevenzione e la Sicurezza del Lavoro (ISPESL) che provvide nel 1982 ad una revisione completa delle "Raccolte". I contenuti di questi codici vennero parzialmente rivisitati solo nel 1998; in particolare l'aggiornamento riguardò le raccolte VSR e VSG mentre le M e S furono lasciate inalterate con conseguente congelamento dell'evoluzione tecnologica relativa a materiali e saldature.

Nell'ambito della Comunità Europea l'esigenza di realizzare leggi di carattere generale che non fossero destinate a divenire, col passare del tempo, obsolete e ad "imbavagliare" di conseguenza lo sviluppo tecnologico del settore, portò, attraverso la risoluzione del Consiglio

della Comunità Europea del 7/5/1985, alla nascita del cosiddetto “Nuovo Approccio”. Ciò si tradusse nella realizzazione di una serie di direttive “armonizzate” caratterizzate da una maggiore flessibilità e volte a favorire il libero mercato di persone, beni e servizi, all’interno della Comunità stessa. In questo modo si evitò il diffondersi di direttive miranti a prodotti specifici, conferendo quindi, una maggiore omogeneità a tutto il contesto tecnico-legislativo europeo.

Il primo caso in cui viene applicata la nuova strategia del “nuovo approccio” nel settore delle attrezzature a pressione è rappresentato dalla direttiva 87/404/CEE relativa ai “Recipienti Semplici a pressione”. I criteri di progettazione e fabbricazione, a livello nazionale, rimasero quelli specificati nelle Raccolte VSR; VSG; M; S, mentre le procedure di certificazione si mantennero aderenti a quelle precedentemente in uso presso le singole nazioni.

Ma la prima reale riorganizzazione del settore si è avuta solo attraverso la direttiva 97/23/CE, nota anche come direttiva PED (*Pressure Equipment Directive*) relativa alla progettazione, fabbricazione e valutazione di conformità delle attrezzature ed insiemi sottoposti ad una pressione relativa maggiore di 0,5 bar. Il recepimento italiano della direttiva è avvenuto tramite il Decreto Legislativo n°93 del 25 febbraio 2000 anche se l’applicazione della stessa è rimasta facoltativa fino al 29 maggio 2002. Il campo di applicazione coperto dalla PED (il cui rispetto, preme ricordare, rappresenta oggi *conditio sine qua non* alla libera circolazione delle attrezzature a pressione sul mercato della Comunità Europea) si presenta estremamente vasto e, spesso, di complessa interpretazione. In tal senso, all’interno della definizione di “attrezzatura a pressione” sono, considerati “recipienti, tubazioni, accessori di sicurezza e accessori a pressione ivi compresi gli elementi annessi a parti pressurizzate quali flange, raccordi, manicotti, supporti e alette mobili”. A questi vanno aggiunti gli “insiemi” definiti come “varie attrezzature a pressione montate da un fabbricante per costituire un tutto integrato e funzionale”. Dalla direttiva risultano invece escluse, in generale, tutte le apparecchiature per cui la pressione non costituisce un fattore di rischio, oltre a pompe, compressori, turbine, motori a combustione interna e a quelle già coperte da altre direttive di prodotto

(direttiva sui recipienti semplici a pressione, Direttiva Macchine, Bassa Tensione, Ascensori, etc.).

L'aspetto principale che caratterizza questa direttiva è la classificazione degli apparecchi a pressione in quattro categorie di rischio definite in base alla tipologia (recipiente a pressione, generatore di vapore, tubazioni), all'energia contenuta in essi sotto forma di pressione, al volume e fluido utilizzato. Attraverso il ricorso a 9 tavole diagrammate viene definita la categoria di classificazione dell'apparecchiatura e, conseguentemente, vengono proposte differenti procedure (13 "moduli") con cui il fabbricante può affrontare la valutazione di conformità ai requisiti essenziali di sicurezza contemplati all'interno della direttiva.

Dal punto di vista tecnico-progettuale gli aspetti maggiormente significativi della direttiva PED vengono trattati all'interno dei primi tre allegati riguardanti rispettivamente la definizione dei Requisiti Essenziali di Sicurezza (relativi alla progettazione, alla costruzione, alle verifiche finali ed ai materiali impiegati per le attrezzature a pressione), delle tavole di classificazione in categorie di rischio e delle procedure di valutazione della conformità.

Come tutte le direttive di prodotto, anche la PED dice quali sono i requisiti minimi di sicurezza che le apparecchiature a pressione devono avere ma non fornisce informazioni utili su come fare ad ottemperare agli stessi. Tale compito è demandato alle norme tecniche ed, in particolar modo, alle cosiddette norme "armonizzate" pubblicate sulla Gazzetta Ufficiale della Comunità Europea (G.U.C.E.). Queste rappresentano linee guida a livello progettuale e procedurale a carattere non cogente. Il vantaggio che il progettista trae dal ricorso a norme "armonizzate" piuttosto che ad altri standard sta nel fatto che esse conferiscono al prodotto a cui sono applicate presunzione di conformità ai requisiti della direttiva. Di seguito si riportano le principali famiglie di norme tecniche armonizzate in materia di attrezzature a pressione:

- EN13445 "Unfired pressure vessels" (CEN/TC/54)
- EN 13480 "Metallic industrial piping" (CEN/TC/267)
- EN 12952 "Water-tub boilers and auxiliary installations" (CEN/TC/269)

EN 12953 “Shell boilers” (CEN/TC/269)

Oltre alle norme tecniche “armonizzate”, alle “Raccolte” ed altre norme (es. CODAP, AD-Merkblätter) una particolare menzione, nel campo della normazione delle apparecchiature a pressione, merita il codice ASME “*Boiler & Pressure Vessel Code*”. Esso nasce circa un secolo fa per iniziativa di un’istituzione privata (*American Society of Mechanical Engineers*), come frutto dell’esigenza di uniformare la legislazione di molti degli Stati della confederazione Americana in materia di apparecchi in pressione (soprattutto caldaie). Ad oggi, è utilizzato in più di 80 paesi e rappresenta sicuramente lo standard mondiale più diffuso per quanto riguarda tale tipologia di prodotto.

L’ASME “*Boiler & Pressure Vessel Code*”, del quale viene pubblicata una nuova edizione ogni tre anni ed annualmente è soggetto ad integrazioni, risulta composto dalle seguenti sezioni:

- Section I, Power Boilers
- Section II, Parts A,B,C & D, Materials
- Section III div. 1, 2, 3, Nuclear Power
- Section IV, Heating Boilers
- Section V, Non Destructive Examination
- Section VI, Heating Boilers
- Section VII, Power Boilers
- Section VIII div. 1, 2, 3, Pressure Vessels
- Section IX, Welding
- Section X, Fiber Plastics
- Section XI, Nuclear Power
- ASME B31.1, Power Piping
- ASME B31.3, Process Piping

ELEMENTI ROTANTI DELLE MACCHINE

8.1 ANELLO ROTANTE

Un anello rotante, sottile in direzione radiale, è soggetto ad uno stato di sollecitazione praticamente monoassiale (Fig. 8.1).

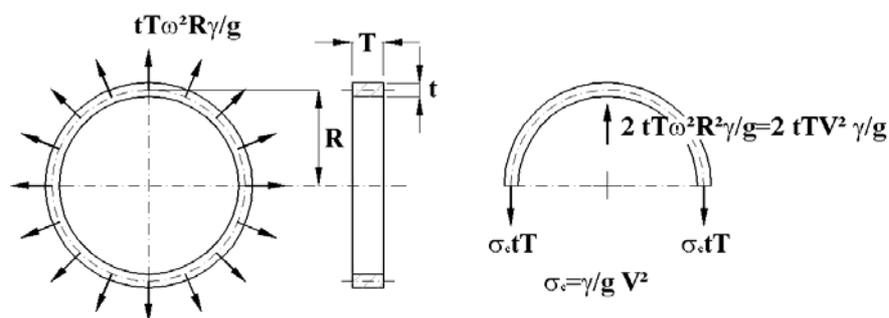


Fig. 8.1 - Anello rotante sottile

La sollecitazione diretta circonferenzialmente vale, come si può facilmente verificare con un calcolo analogo a quello svolto per il tubo sottile in pressione (paragrafo 7.1):

$$\sigma_c = \rho\omega^2 r^2 = \rho V^2 \quad (8.1)$$

Dove ρ è la densità del materiale, ω la velocità angolare, r il raggio medio e V la velocità periferica in corrispondenza del raggio medio.

Per un anello d'acciaio ($\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$) si ha:

$$\sigma_c = \rho V^2 = 7850 V^2$$

e quindi:

$$V_{amm} = \sqrt{\frac{\sigma_{amm}}{\rho}}$$

Per esempio, con un acciaio avente $\sigma_{amm} = 250 \text{ N/mm}^2$ si trova:

$$V_{amm} = 178 \text{ m/s}$$

Velocità più elevate si possono raggiungere, a parità di resistenza del materiale, con le ruote in cui l'anello costituente la corona è collegato al mozzo per mezzo di un numero non troppo piccolo di razze, o, meglio, per mezzo di un disco. Le velocità periferiche più alte (fino a 500m/s) si possono raggiungere però soltanto in dischi con spessore variabile in modo opportuno.

8.2 DISCHI ROTANTI DI SPESSORE UNIFORME

Analogo al problema del cilindro cavo in pressione agli effetti del calcolo delle sollecitazioni, è quello del disco rotante di spessore uniforme.

Per un disco di spessore uniforme, forato o pieno con ragionamenti simili a quelli svolti per il cilindro cavo nel paragrafo 7.2, si ha l'equazione differenziale seguente:

$$\sigma_c - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} - \rho \omega^2 r^2 = 0 \quad (8.2)$$

nelle funzioni $\sigma_c(r)$ e $\sigma_r(r)$ (ρ , ω sono rispettivamente la densità del materiale e la velocità angolare).

Si perviene alla seguente equazione differenziale del secondo ordine per la funzione spostamento radiale $u(r)$:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \nu \rho \omega^2 \frac{1 - \nu^2}{E} = 0 \quad (8.3)$$

essa differisce da quella relativa ai cilindri in pressione per il termine corrispondente alla forza centrifuga e si può riscrivere nella forma:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right) + \rho \omega^2 \frac{1-\nu^2}{E} = 0 \quad (8.4)$$

dalla quale con due integrazioni si ha:

$$u = -\rho \omega^2 \frac{1-\nu^2}{E} \frac{r^3}{8} + Ar + \frac{B}{r} \quad (8.5)$$

con A e B costanti da determinare con le condizioni al contorno.

Secondo che il disco sia pieno o forato si trovano infine, ancora con sviluppi simili a quelli del paragrafo 7.2, le espressioni seguenti per le sollecitazioni σ_r e σ_c .

Per il disco forato:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(r_e^2 + r_i^2 - \frac{r_e^2 r_i^2}{r^2} - r^2 \right) \quad (8.6)$$

$$\sigma_c = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(r_e^2 + r_i^2 - \frac{r_e^2 r_i^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) \quad (8.7)$$

e per il disco pieno:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_e^2 - r^2) \quad (8.8)$$

$$\sigma_c = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(r_e^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) \quad (8.9)$$

Le (8.8) e (8.9) forniscono le tensioni per i dischi rotanti, rispettivamente forato e pieno, quando il bordo del foro ed il contorno esterno sono scarichi.

Il bordo esterno può essere caricato, ad esempio, dalle forze centrifughe dovute alla presenza di una serie di espansioni (palette di una turbina, poli di un rotore di macchina elettrica, ecc.); di solito non si commettono grandi errori assimilando l'effetto delle azioni centrifughe delle espansioni a quello di un'azione uniforme f (Fig. 8.2) applicata al bordo esterno.

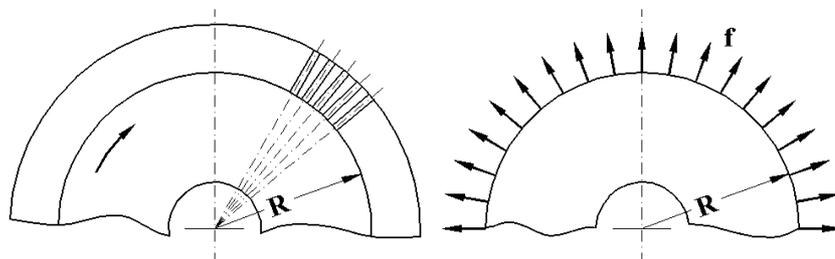


Fig. 8.2 – Forze centrifughe agenti sul bordo esterno del rotore

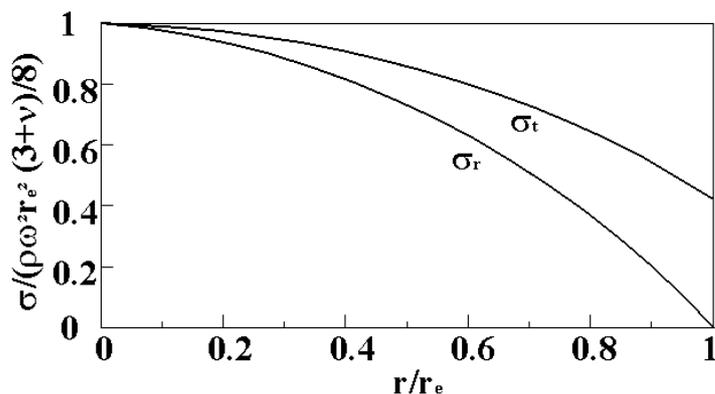
Le sollecitazioni provocate nel disco dalle forze applicate al bordo esterno possono essere calcolate separatamente e poi sommate, per il principio di sovrapposizione degli effetti, a quelle presenti nel disco considerato scarico sul bordo esterno.

Indicando con m_e la massa di ciascun'espansione, con n il loro numero, con r il raggio e con r_e la distanza del baricentro di ciascun'espansione dall'asse di rotazione, l'effetto della centrifugazione delle espansioni equivale, per il disco, ad un carico distribuito sulla superficie esterna di raggio r :

$$f = \frac{nm_e\omega^2 r_e}{2\pi r} \quad (8.10)$$

Le sollecitazioni prodotte dalle azioni f possono quindi calcolarsi con le formule di Lamé per il cilindro soggetto a pressione esterna, sostituendo p con $-f/s$, essendo s lo spessore del disco.

Nelle Fig. 8.3 e 8.4 sono date sotto forma di diagrammi, rese adimensionali le tensioni σ_r e σ_t per i dischi pieno e forato; espresse dalle (8.6, 8.7) e (8.8, 8.9).

Fig. 8.3 – Andamento di σ_r e σ_t per il disco pieno

I diagrammi sono stati tracciati, nel caso dei dischi forati per un coefficiente di Poisson $\nu=0,3$, che è il valore normalmente adottato nei

calcoli per l'acciaio e per gli altri materiali metallici utilizzati per costruire i pezzi delle macchine.

Nella Fig. 8.5 sono rappresentate le sollecitazioni nella parte centrale del rotore di un turbo alternatore. L'applicazione delle formule dei dischi rotanti a casi come questo, in cui non si ha uno spessore piccolo in senso assiale, non sembra dare luogo di solito ad errori eccessivi.

È da notare che le tensioni nella parte compresa fra il bordo del foro e la base delle cave sono state calcolate come assialsimmetriche, avendo sostituito le forze centrifughe distribuite in modo periodico con forze distribuite uniformemente.

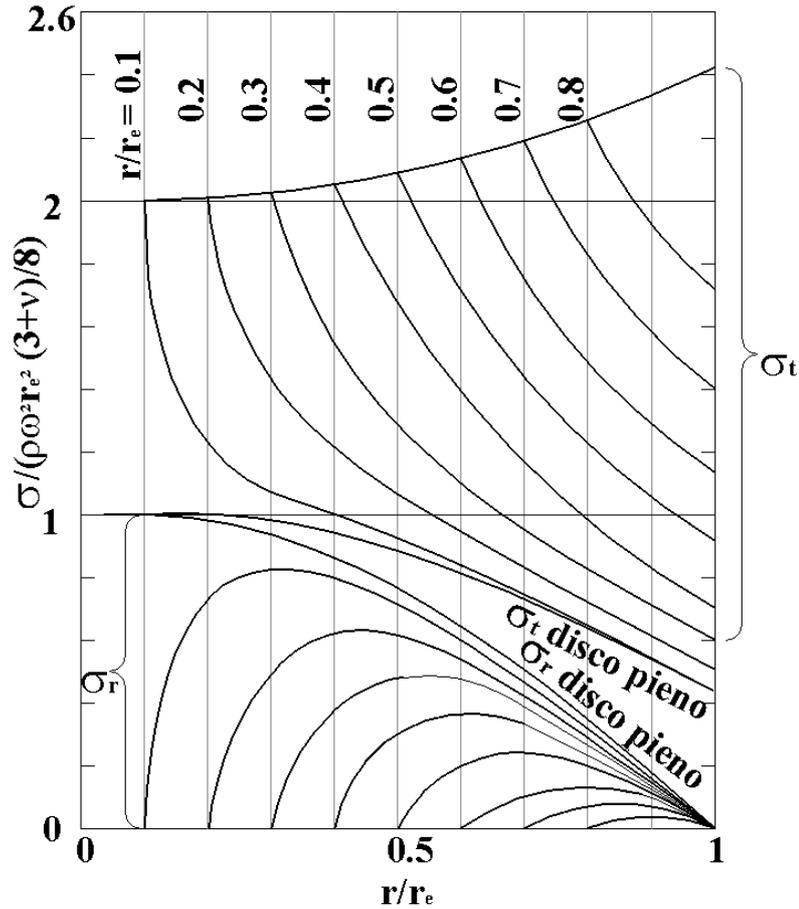


Fig. 8.4 - Andamento di σ_r e σ_t per il disco forato

Per aumentare la resistenza dei dischi rotanti e dei rotor, si suole farli ruotare, prima di porli in servizio, ad una velocità tale da

provocare snervamento nella parte centrale, che è la più sollecitata. Lo scopo è di creare uno stato di precompressione, per avere poi in servizio delle tensioni massime ridotte.

Un caso interessante è quello di un disco rotante calettato sul proprio albero per mezzo di un forzamento. (Fig. 8.6).

Senza grandi errori per lo studio dello stato di sollecitazione nel disco, si può sostituire la situazione reale (Fig. 8.6a) con la schematizzazione che tiene conto quanto all'albero solo del tratto compreso fra i piani che delimitano il disco (Fig. 8.6b). A questo punto, per analizzare lo stato di sollecitazione che si ha nel disco a seguito del forzamento iniziale e della successiva rotazione con velocità ω , è importante ricordare alcune proprietà dei corpi elastici soggetti a condizioni con energia vincolata: un corpo elastico, non soggetto a carichi esterni, soggetto invece ad un sistema di autotensioni σ_0 , quando sia soggetto successivamente ad un sistema di carichi i quali, se applicati al corpo privo di autotensioni provocherebbero un sistema di tensioni σ , è soggetto alla fine alle tensioni $\sigma_i = \sigma_0 + \sigma$.

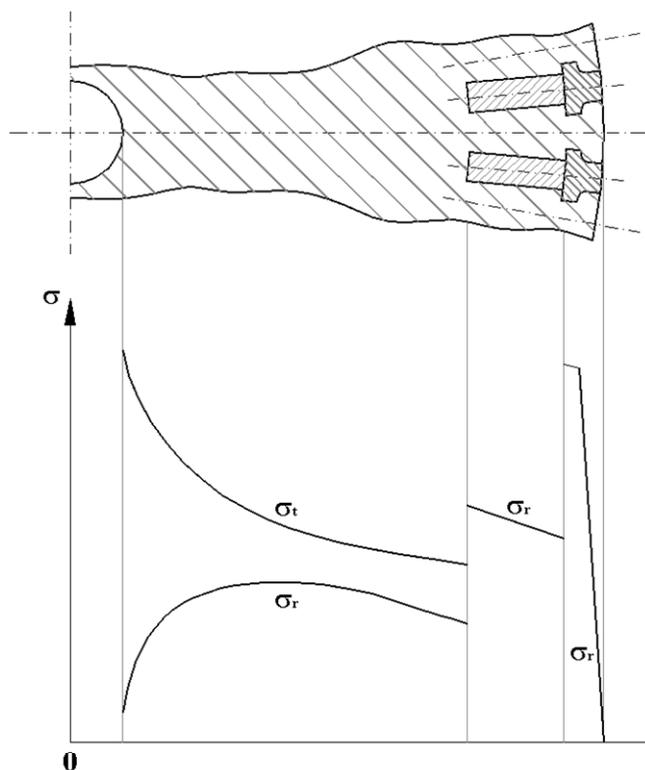


Fig. 8.5 – Sollecitazioni nella parte centrale del rotore di un turbo alternatore

Nel caso del disco calettato a forza sull'albero il corpo da considerare è quello schematizzato nella Fig. 8.6, composto dal disco e dal tratto di albero che riempie il foro del disco: in definitiva un disco pieno. Secondo quanto sopra richiamato lo stato di sollecitazione durante la rotazione sarà dunque pari alla somma di quello provocato dal forzamento a disco fermo e da quello provocato nel disco pieno (ovvero nel sistema completo albero-disco), e privo di coazioni, dalla rotazione. Il primo stato di tensione si trova applicando il metodo di calcolo indicato nel paragrafo 7.3 per i cilindri forzati (tenendo conto che si è in presenza di un caso limite, con il cilindro interno pieno). Il secondo si trova evidentemente applicando le formule delle tensioni nel disco rotante pieno, date in questo paragrafo.

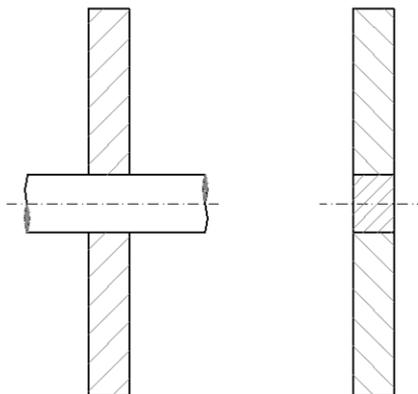


Fig. 8.6 - Disco rotante calettato sul proprio albero per mezzo di un forzamento

8.3 DISCHI ROTANTI DI SPESSORE VARIABILE

Si consideri in primo luogo la ruota rappresentata in Fig. 8.7c, composta da un mozzo, da una corona e da un disco di collegamento fra i due, ciascun elemento essendo di spessore costante. Una tale schematizzazione può essere utilizzata sia per ruote integrali, ottenute per fusione o per fucinatura (Fig. 8.7a) sia per ruote saldate (Fig. 8.7b).

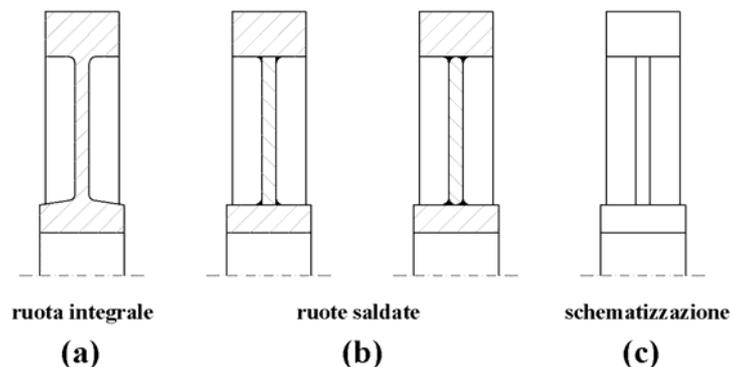


Fig. 8.7 - Dischi ruotanti di spessore variabile

Si separino ora idealmente i tre elementi di una ruota del tipo descritto con due tagli in corrispondenza delle due superfici cilindriche di separazione fra mozzo e disco e fra disco e corona di raggi r_2 e r_3 rispettivamente (Fig. 8.8a). Si facciano ruotare quindi i tre elementi alla velocità angolare ω , essi si espanderanno in direzione radiale distaccandosi (Fig. 8.7b). Lo spessore radiale del gioco che si viene a creare in corrispondenza delle due sconnessioni si calcola applicando a ciascuno dei tre elementi la teoria del disco rotante di spessore costante.

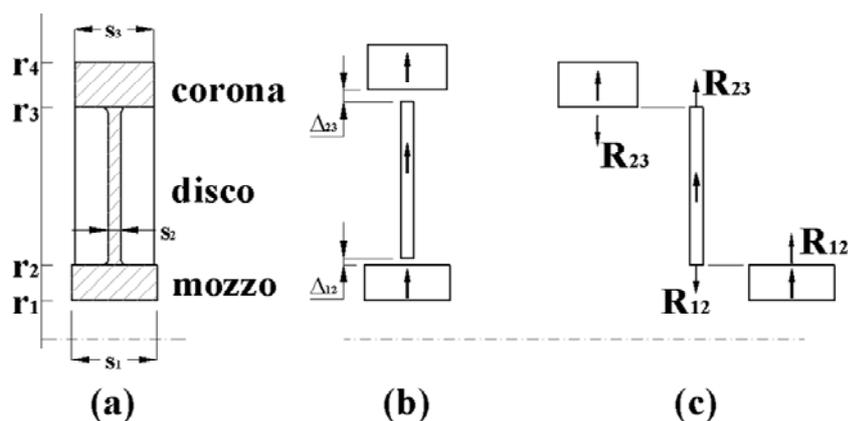


Fig. 8.8 - Dischi ruotanti di spessore variabile: schema con parti separate

Con i simboli di Fig. 8.8a e 8.8b e con quelli del capitolo 7, relativo ai cilindri in pressione, risultano le seguenti espressioni del gioco fra mozzo e disco e di quello fra disco e corona rispettivamente:

$$\Delta_{12} = \rho \frac{\omega^2}{E} \frac{3+\nu}{4} r_2 (r_3^2 - r_1^2) \quad (8.11)$$

$$\Delta_{23} = \rho \frac{\omega^2}{E} \frac{3+\nu}{4} r_3 (r_4^2 - r_2^2) \quad (8.12)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti in ciascuno dei tre elementi di cui è composta la ruota, lo stato di sollecitazione reale risulta uguale alla somma di quello che si produce per la rotazione e di quello provocato dalle azioni radiali degli elementi o dell'elemento (nel caso del mozzo e della corona) contigui, necessarie per ristabilire la congruenza, ovvero necessarie per eliminare i giochi o il gioco.

La situazione tensionale nel disco in rotazione può anche essere vista come risultante dalla somma delle sollecitazioni che nascono nella ruota completa quando sono eliminate, una alla volta, le sconessioni in corrispondenza dei raggi r_2 e r_3 , e quando ciascun anello è fatto ruotare isolatamente. Si hanno dunque per ognuno dei tre anelli tre contributi allo stato tensionale: uno quando si elimina sulla ruota completa una delle due sconessioni prodotte dalla rotazione degli anelli separati, uno quando si elimina l'altra sconessione ed infine uno corrispondente alla rotazione da solo dell'anello considerato.

Lo stato di sollecitazione, in ciascuno dei tre anelli, provocato dalla rotazione, si determina applicando la teoria dei dischi rotanti di spessore uniforme.

Gli stati di sollecitazione provocati dall'eliminazione di ciascuna delle due sconessioni di spessore Δ_{12} e Δ_{23} , si calcolano in modo analogo a quelli prodotti dagli accoppiamenti con interferenza tenendo conto che dette sconessioni equivalgono, come le interferenze, a dislocazioni, solo che hanno il segno opposto a quelle.

Le azioni radiali (carico per unità di lunghezza lungo le circonferenze) R_{12} fra il mozzo ed il disco e R_{23} fra il disco e la corona, positive se di trazione, si determinano con il sistema seguente, che esprime il fatto che ciascuna connessione è eliminata per le azioni radiali applicate ai due elementi sconnessi (Fig. 8.8c):

$$\Delta_{12} = A_{11}R_{12} + A_{12}R_{23} \quad (8.13)$$

$$\Delta_{23} = A_{21}R_{12} + A_{22}R_{23} \quad (8.14)$$

I coefficienti delle incognite R_{12} e R_{23} sono coefficienti di influenza e si determinano con la teoria dei cilindri spessi in pressione. Ad esempio A_{11} è la somma dello spostamento radiale, verso l'esterno, del bordo esterno del mozzo e dello spostamento radiale, verso l'interno, del bordo interno del disco, quando si applichi una azione radiale di trazione unitaria fra i due elementi.

Applicando i risultati della teoria dei cilindri in pressione, si trova:

$$A_{11} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{s_1} \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} [(1-\nu)r_2^3 + (1+\nu)r_1^2 r_2] + \frac{1}{s_2} \frac{1}{r_3^2 - r_2^2} [(1-\nu)r_2^3 + (1+\nu)r_3^2 r_2] \right\} \quad (8.15)$$

$$A_{12} = -\frac{2}{E} \frac{r_2^2 r_3}{r_3^2 - r_2^2} \frac{1}{s_2} \quad (8.16)$$

$$A_{21} = -\frac{2}{E} \frac{r_2^2 r_3}{r_3^2 - r_2^2} \frac{1}{s_2} = A_{12} \quad (8.17)$$

$$A_{22} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{s_2} \frac{1}{r_3^2 - r_2^2} [(1-\nu)r_3^3 + (1+\nu)r_2^2 r_3] - \frac{1}{s_3} \frac{1}{r_4^2 - r_3^2} [(1-\nu)r_3^3 + (1+\nu)r_4^2 r_3] \right\} \quad (8.18)$$

La risoluzione del sistema costituito dalle (8.13) e (8.14) fornisce gli sforzi radiale R_{12} e R_{13} riconducendo il problema alla determinazione della sollecitazione in cilindri cavi soggetti ad azione sulla superficie interna e/o esterna; tale determinazione può evidentemente essere eseguito per mezzo dei risultati della teoria dei cilindri di grande spessore in pressione.

Riassumendo le sollecitazioni σ_r e σ_c nella ruota di Fig. 8.8 si calcolano sommando quelle che si ottengono facendo ruotare separatamente i tre elementi (mozzo, disco e corona) e quelle corrispondenti ai carichi radiali che si devono applicare nelle sconnessioni per ristabilire la congruenza, che si ricavano risolvendo il sistema delle equazioni (8.13) e (8.14).

Un procedimento analogo al precedente si può applicare per i dischi di spessore variabile con continuità (tipici sono i dischi delle turbine). In questo caso si deve in primo luogo discretizzare il problema, sostituendo il disco reale con un disco a "scalini" (Fig. 8.9) ed applicando successivamente il metodo precedente.

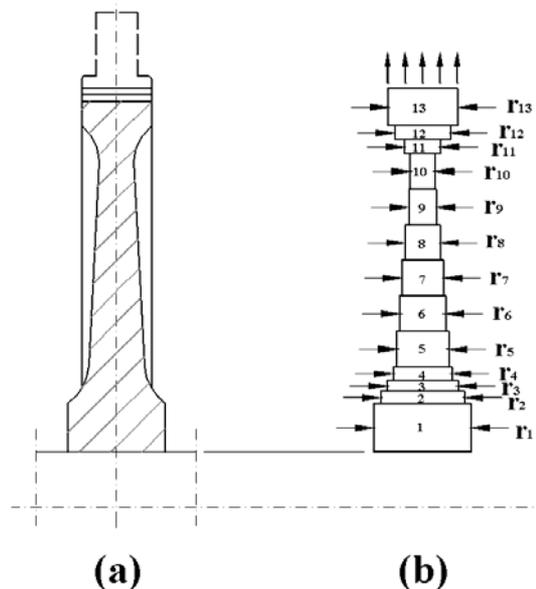


Fig. 8.9 Dischi ruotanti di spessore variabile con continuità

Per la sconnessione fra l' i -esimo e $(i + 1)$ -esimo anello si ha lo spessore:

$$\Delta_{i,i+1} = \frac{\gamma\omega^2}{gE} \frac{3+\nu}{4} r_{i+1} (r_{i+2}^2 - r_i^2) \quad (i = 1, 2, \dots, 3-1) \quad (8.19)$$

e l'equazione di congruenza:

$$\Delta_{i,i+1} = A_{i,i+1} R_{i-1,i} + B_{i,i+1} R_{i,i+1} + C_{i,i+1} R_{i+1,i+2} \quad (8.20)$$

In definitiva risulta un sistema di $n-1$ equazioni nelle $n-1$ incognite $R_{1,2}; R_{2,3}; \dots; R_{n-1,n}$

I coefficienti $A_{1,k}$ si determinano ancora facendo ricorso alla teoria dei cilindri in pressione:

$$\Delta_{i,i+1} = A_{i,i+1} R_{i-1,i} + B_{i,i+1} R_{i,i+1} + C_{i,i+1} R_{i+1,i+2} \quad (8.21)$$

La matrice dei coefficienti assume la forma seguente (con x sono indicati i coefficienti non nulli):

$$\begin{array}{cccccccc}
 x & x & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 x & x & x & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & x & x & x & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & x & x & x & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & x & x & x \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & x & x
 \end{array} \tag{8.22}$$

risultano diversi da zero cioè solo i coefficienti compresi entro la fascia a cavallo della diagonale principale per una larghezza di tre elementi.

In definitiva gli sforzi radiale si ricavano come incognite di un sistema lineare del tipo:

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + a_{11}x_2 + 0 & = & \gamma_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + 0 & = & \gamma_2 \\
 \dots\dots\dots & & \dots \\
 0 + a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = \gamma_{n-1} & = & \gamma_{n-1} \\
 0 + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n & = & \gamma_n
 \end{array} \tag{8.23}$$

avente una matrice dei coefficienti delle incognite di tipo “tridiagonale”, ovvero in cui sono nulli solo gli elementi sulla diagonale principale e quelli sulle due diagonale contigue ad essa.

Un sistema del tipo del (8.22) si può risolvere mediante il semplice algoritmo di Tang che di seguito si riporta senza dimostrazione.

Si pone:

$$\begin{array}{rcl}
 z_1 & = & 0 \\
 b_1 & = & 1 \\
 z_2 & = & \frac{\gamma_1}{a_{12}} \\
 b_2 & = & \frac{a_{11}}{a_{12}}
 \end{array} \tag{8.24}$$

Si calcolano quindi le quantità:

$$\begin{aligned}
 z_{k+1} &= \frac{y_k - a_{k,k}z_k - a_{k,k-1}z_{k-1}}{a_{k,k+1}} \\
 b_{k+1} &= -\frac{a_{k,k}b_k + a_{k,k-1}b_{k-1}}{a_{k,k+1}} \quad \text{per } k = 2, 3, \dots, n-1
 \end{aligned}
 \tag{8.25}$$

ed ancora:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{y_n - a_{n,n-1}z_{n-1}}{a_{n,n}} \\
 D &= -\frac{a_{n,n-1}b_{n-1}}{a_{n,n}}
 \end{aligned}
 \tag{8.26}$$

Si potrebbe dimostrare, per le incognite, che risulta:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{z_n - C}{b_n - D} \\
 x_k &= z_k - b_k x_1 \quad \text{per } k = 2, 3, \dots, n-1
 \end{aligned}
 \tag{8.27}$$

Il sistema è risolvibile, in modo semplice, per qualunque numero di equazioni.

La determinazione degli sforzi radiale R_{ik} deve essere seguita dal calcolo delle sollecitazioni nei singoli anelli, nel modo indicato per la ruota composta da un mozzo, un disco ed una corona. Quando per la rapida variazione dello spessore del disco lungo il raggio, gli elementi anulari siano di piccolo spessore, in direzione radiale, il calcolo delle sollecitazioni risulta molto semplificato. Per l'anello generico i -esimo si può in tal caso ammettere che siano costanti le sollecitazioni σ_r e σ_c , senza per ciò commettere grave errore.

Risulta quindi, indicando con $R_{i-1,i}$ ed $R_{i,i+1}$ gli sforzi radiale relativi alle superfici interna ed esterna rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ri} &= \frac{R_{i,i+1} + R_{i-1,i}}{2s_i} \\
 \sigma_{ci} &= \frac{R_{i,i+1}r_{i+1} - R_{i-1,i}r_i}{r_{i+1} - r_i}
 \end{aligned}
 \tag{8.28}$$

L'andamento delle sollecitazioni lungo il raggio viene dunque approssimato "a scalini".

Concludendo le sollecitazioni nel disco di spessore variabile si calcolano sommando quelle relative ai singoli anelli in cui è stato ridotto, rotanti isolati, e di quelle provocate dalle azioni R_{ik} .

Il metodo esposto non è il solo utilizzabile per il calcolo delle sollecitazioni nei dischi di spessore variabile; alcune volte si riesce ad integrare l'equazione differenziale generale dei dischi rotanti (di cui la (8.3) è un caso particolare); un altro metodo usato è quello di Grammel, basato pure esso sulla discretizzazione del disco di spessore variabile.

Il calcolo delle sollecitazioni con il metodo esposto o con uno di quelli citati non esaurisce il problema, poiché essi si basano sull'ipotesi, di tensioni radiali sempre costanti attraverso lo spessore, ciò evidentemente non è esatto, in particolare quando si abbiano rapide variazioni di spessore in direzione radiale, come nel caso di Fig. 8.7 ad esempio; in tali casi mentre è da ritenere abbastanza preciso il valore che si calcola delle azioni radiale per unità di lunghezza lungo le circonferenze, non altrettanto si può dire per le sollecitazioni, che non sono affatto costanti attraverso lo spessore. Le tensioni nominali che si calcolano possono in tali casi essere corrette con opportuni coefficienti di intaglio che tengano conto della non uniforme distribuzione.

Come già si è accennato per i dischi di spessore costante, esiste in generale per i dischi la possibilità di aumentarne la resistenza in servizio sottoponendoli preventivamente ad una operazione di plasticizzazione con conseguenti tensione residue, mediante rotazione ad altissima velocità.

Le considerazioni svolte in questo paragrafo si riferiscono a dischi aventi un piano di simmetria perpendicolare all'asse di rotazione, il problema si complica nei casi in cui manchi tale simmetria, nei quali possono nascere sollecitazioni di tipo flessionale.